图 象 分 析

（第4版）

章毓晋

清华大学电子工程系 100084 北京

第4单元　数学工具

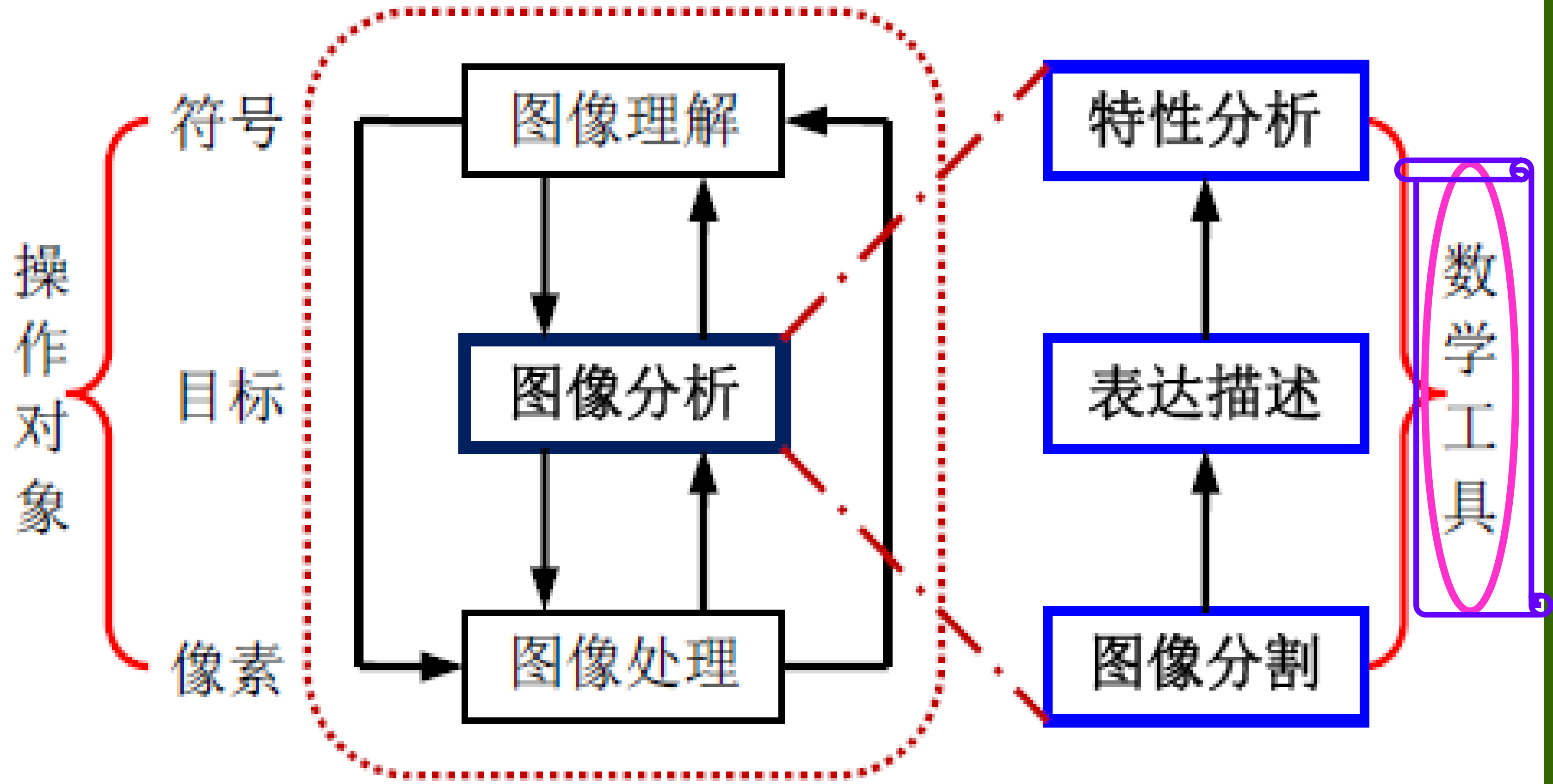


图 1.2.2　图像分析主要功能模块

第4单元　数学工具

- 第13章　数学形态学：二值
- 第14章　数学形态学：灰度
- 第15章　图象识别

数学及其他学科理论和工具的支持

数学形态学表示以形态为基础对图象进行分析的数学工具

操作对象可以是二值或灰度图象

图象模式识别（简称图象识别）

第13章 数学形态学：二值

- 形态学（morphology）一般指生物学中研究动物和植物结构的一个分支
- 形态学因子/要素（morphological factor）指不包含单位的数或特性
- 数学形态学（也有称图象代数的）表示以形态为基础对图象进行分析的数学工具
- 数学形态学的数学基础和所用语言是集合论
- 数学形态学的基本运算在二值图象中和灰度（多值）图象中各有特点

第13章 数学形态学：二值

13.1　基本集合定义

名词/概念：

(1) 集合：用大写字母表示，空集记为$\varnothing$

(2) 元素：用小写字母表示

(3) 子集：$A \subseteq B$（读作A包含于B）

(4) 并集：$A \cup B$（$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$或$x \in B$）

(5) 交集：$A \cap B$（$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$且$x \in B$）

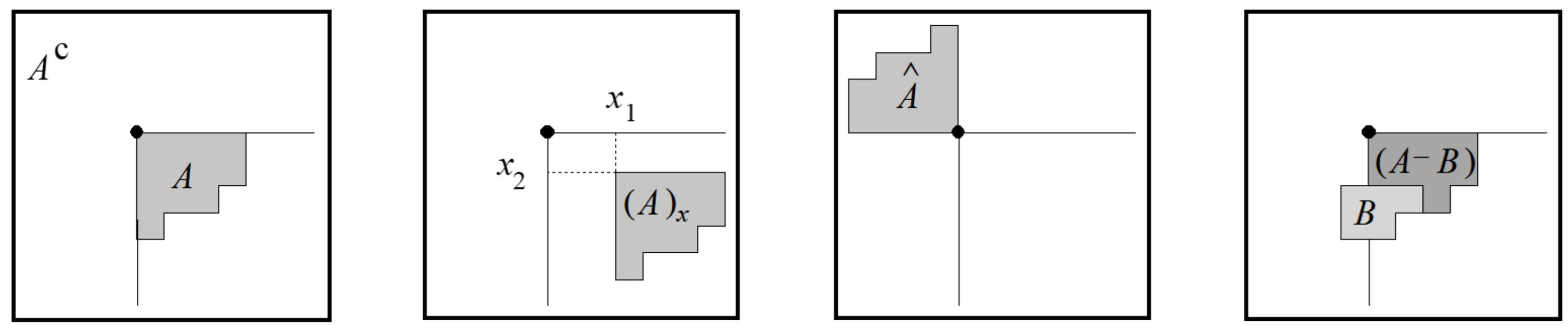
13.1 基本集合定义

(6) 补集：$A^{c} = \{x \mid x \notin A\}$

(7) 位移：$(A)_x = \{y \mid y = a + x,\ \ a \in A\}$

(8) 映像：$\hat{A} = \{x \mid x = -a,\ \ a \in A\}$

(9) 差集：$A - B = \{x \mid x \in A,\ \ x \notin B\} = A \cap B^{c}$



(a) (b) (c) (d)

13.2　二值形态学基本运算

集合运算：

*A*为图象集合，*B* 为结构元素（集合）

数学形态学运算是用*B*对*A*进行操作

结构元素要指定1个原点（参考点）

13.2.1　　二值膨胀和腐蚀

13.2.2　　二值开启和闭合

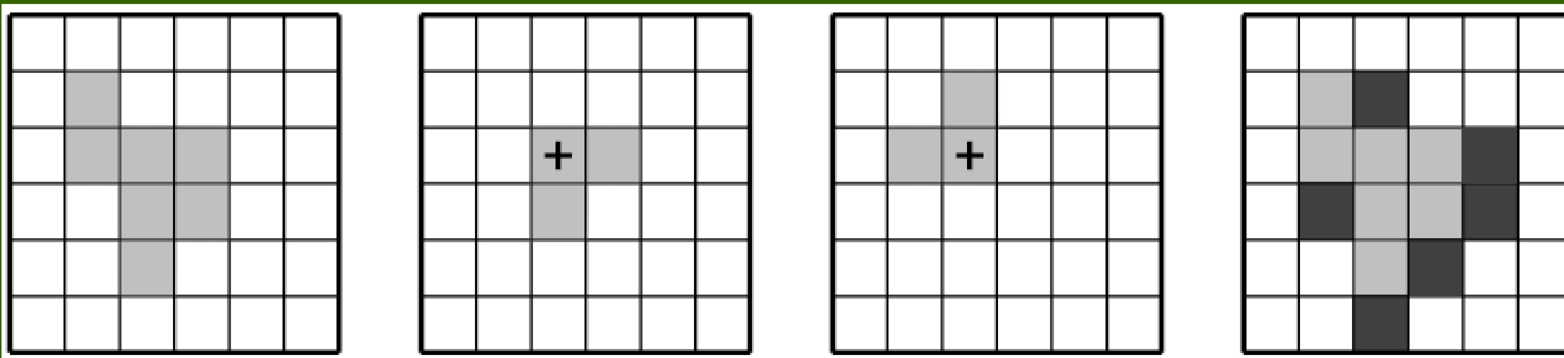
13.2.3　　二值基本运算性质

1.　膨胀

膨胀的算符为 ⊕

$$A \oplus B = \{x \mid [(\hat{B})_x \cap A] \subseteq A\}$$

集合A　　结构元素B　　B的映像　　集合$A \oplus B$



(a)　(b)　(c)　(d)

图 13.2.1　膨胀运算示例

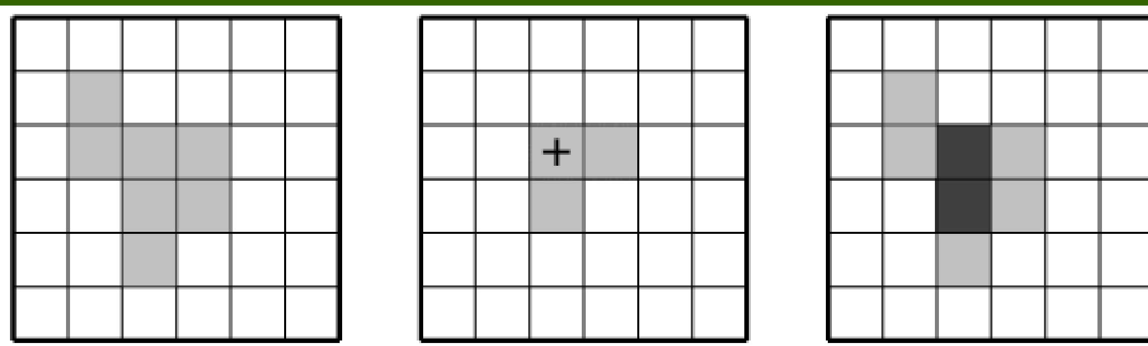
13.2.1　二值膨胀和腐蚀

2.　腐蚀

腐蚀的算符为⊖

$$A \ominus B = \left\{ x \;\middle|\; (B)_x \subseteq A \right\}$$

集合A　　结构元素B　　集合$A \ominus B$



(a)　(b)　(c)

图 13.2.2　腐蚀运算示例

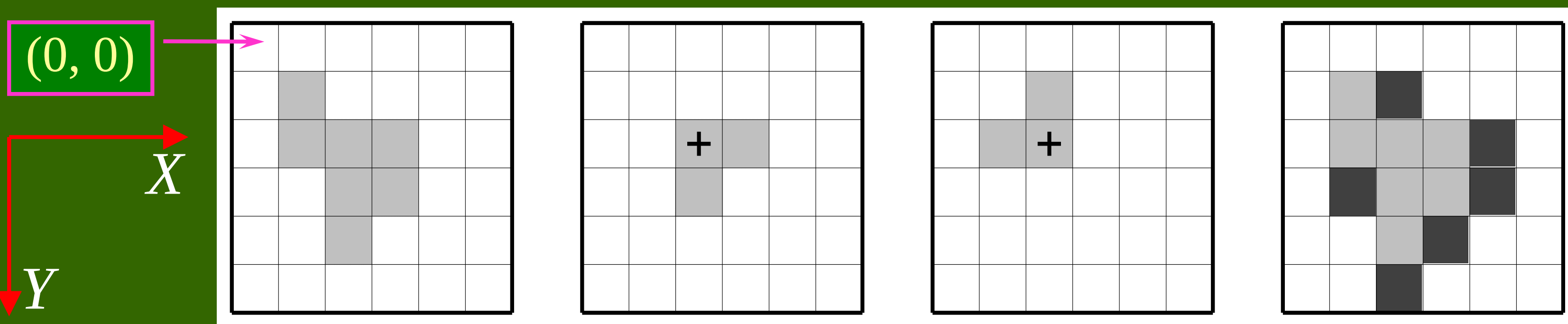
13.2.1 二值膨胀和腐蚀

3. 用向量运算实现膨胀和腐蚀

$$A \oplus B = \left\{ x \mid x = a + b \quad \text{对某些} \quad a \in A \quad \text{和} \quad b \in B \right\}$$

A = {(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4)}

B = {(0, 0), (1, 0), (0, 1)}



$A \oplus B$ = {(1, 1), (2, 1); (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2); (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3); (2, 4), (3, 4); (2, 5)}

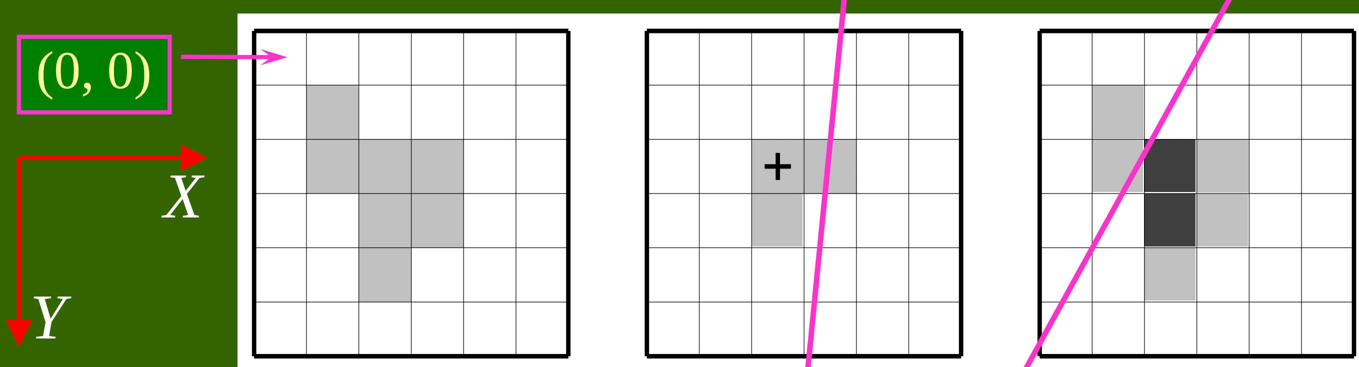
13.2.1 二值膨胀和腐蚀

3. 用向量运算实现膨胀和腐蚀

$$A \ominus B = \{\, x \mid (x+b) \in A \quad \text{对每一个} \ \ b \in B \,\}$$

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4)\}$$

$$B = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$$



$$A \ominus B = \{(2, 2), (2, 3)\}$$

13.2.1 二值膨胀和腐蚀

4. 用位移运算实现膨胀和腐蚀

膨胀

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$$

原点不属于结构元素

$A \not\subset A \oplus B$

按每个b来位移A并把结果并（OR）起来

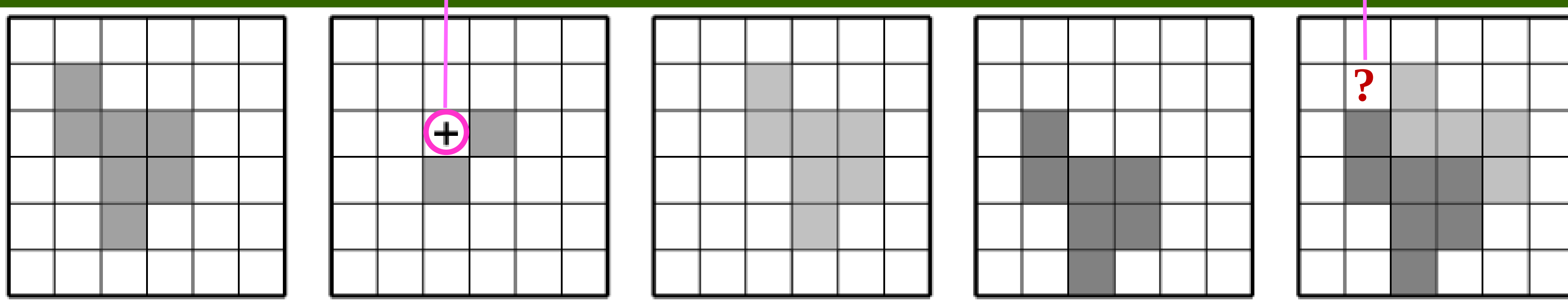


图 13.2.3 膨胀的位移运算示例

13.2.1 二值膨胀和腐蚀

4. 用位移运算实现膨胀和腐蚀

腐蚀 $$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$$

按每个*b*来负位移*A*并把结果交（AND）起来

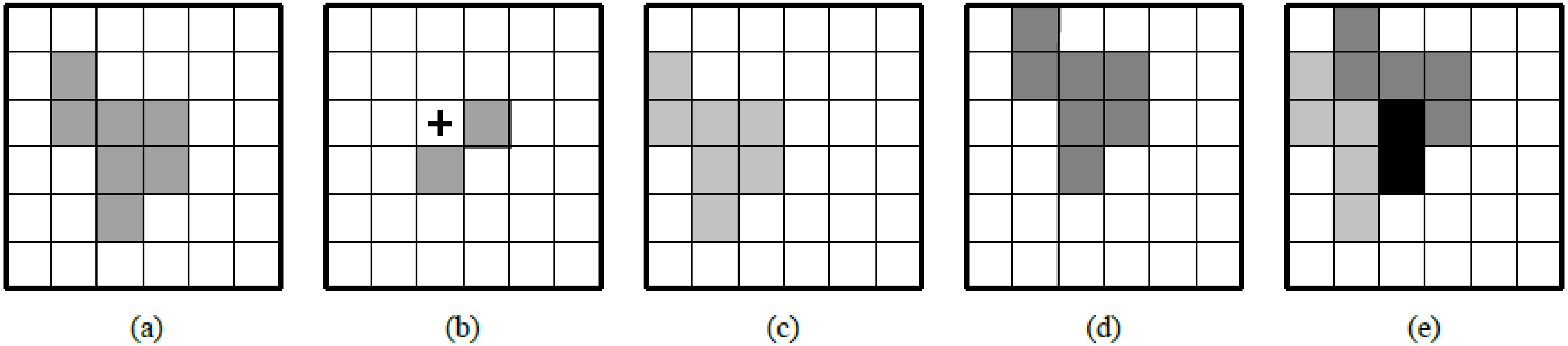
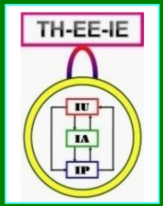


图 13.2.4 腐蚀的位移运算示例

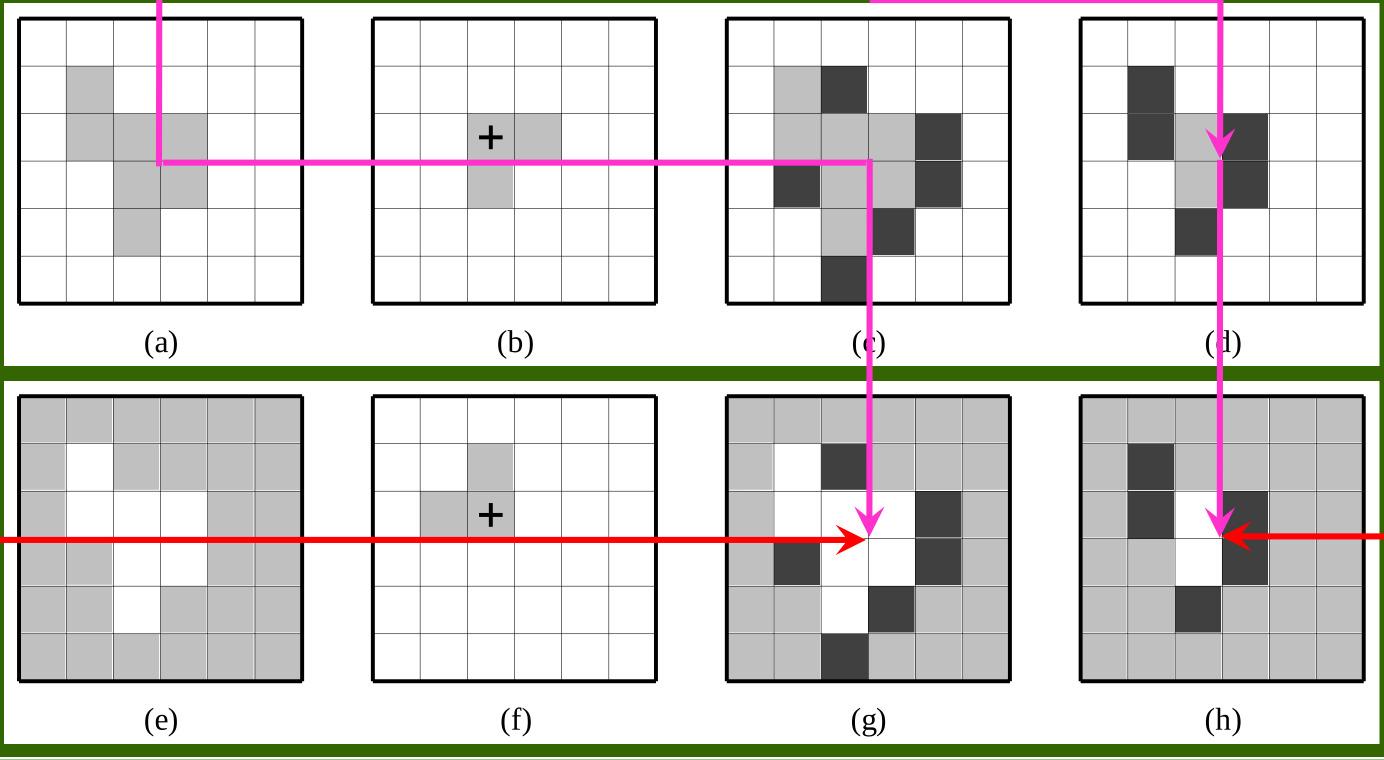
13.2.1 二值膨胀和腐蚀



5. 膨胀和腐蚀的对偶性

$$(A\oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$$

$$(A\ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$



6.　二值膨胀和腐蚀的结合

➢　还与集合运算结合

(1)　并集的膨胀等于膨胀的并集

(2)　并集的腐蚀包含了腐蚀的并集

(3)　交集的膨胀包含在膨胀的交集中

(4)　交集的腐蚀等于腐蚀的交集

$$B \oplus (A_1 \cup A_2) = (A_1 \cup A_2) \oplus B = (A_1 \oplus B) \cup (A_2 \oplus B)$$

$$(A_1 \cup A_2) \ominus B \supseteq (A_1 \ominus B) \cup (A_2 \ominus B) \qquad B \ominus (A_1 \cup A_2) = (A_1 \ominus B) \cap (A_2 \ominus B)$$

$$B \oplus (A_1 \cap A_2) = (A_1 \cap A_2) \oplus B \subseteq (A_1 \oplus B) \cap (A_2 \oplus B)$$

$$(A_1 \cap A_2) \ominus B = (A_1 \ominus B) \cap (A_2 \ominus B)$$

13.2.1　二值膨胀和腐蚀

6.　二值膨胀和腐蚀的结合

- 还与逻辑运算结合

先将标签文字进行膨胀，再将结果与原始文字进行XOR运算，获得中间镂空的标签，可用于覆盖在全黑或全白的图象区域上方进行标注

原始文字

镂空标签

13.2.2 二值开启和闭合

1. 定义

膨胀和腐蚀并不互为逆运算！

它们可以级连结合使用

开启：先对图象进行腐蚀然后膨胀其结果

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

闭合：先对图象进行膨胀然后腐蚀其结果

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

13.2.2　二值开启和闭合

2.　几何解释

填充性质：$A \circ B = \bigcup \{(B)_x \mid (B)_x \subset A\}$

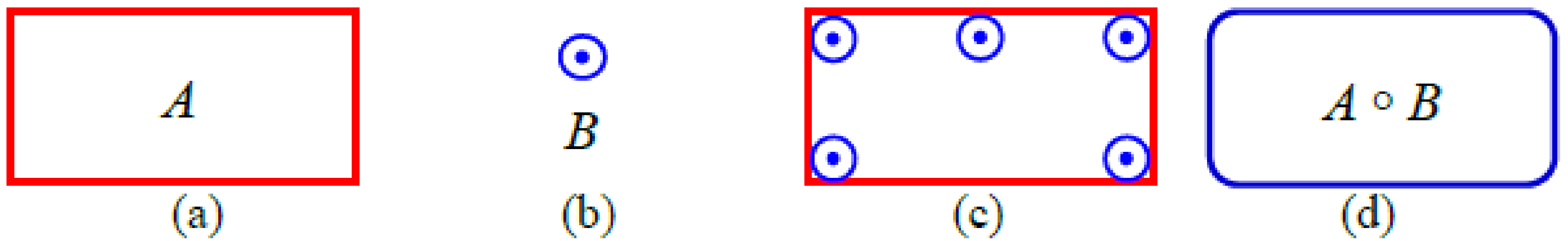


图 13.2.10　开启的填充特性

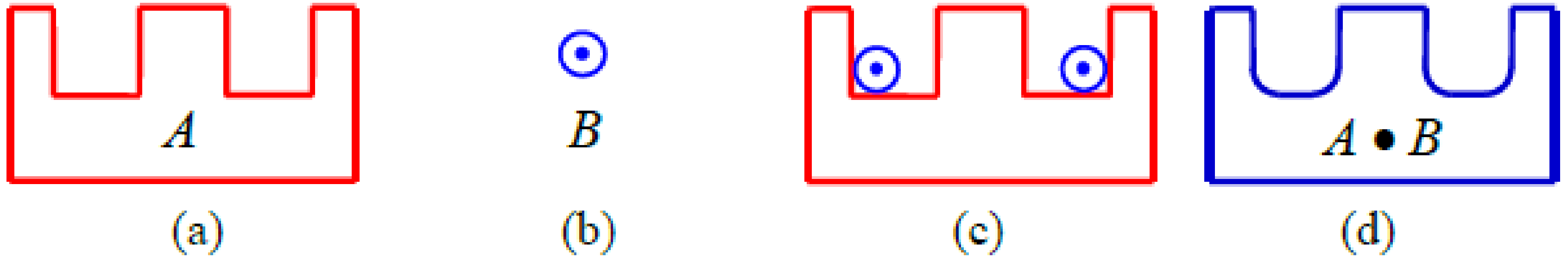


图 13.2.11　闭合的几何解释（背景填充）

13.2.2 二值开启和闭合

3. 二值开启和闭合的对偶性

开启和闭合的对偶性表示为

$$\boxed{(A \circ B)^{c} = A^{c} \bullet \hat{B}}$$

$$\boxed{(A \bullet B)^{c} = A^{c} \circ \hat{B}}$$

证明：

$$(A \circ B)^{c} = [(A \ominus B) \oplus B]^{c} \overset{(13.2.10)}{=} (A \ominus B)^{c} \ominus \hat{B} \overset{(13.2.11)}{=} A^{c} \oplus \hat{B} \ominus \hat{B} \overset{(13.2.13)}{=} A^{c} \bullet \hat{B}$$

$$(A \bullet B)^{c} = [(A \oplus B) \ominus B]^{c} = (A \oplus B)^{c} \oplus \hat{B} = A^{c} \ominus \hat{B} \oplus \hat{B} = A^{c} \circ \hat{B}$$

13.2.3　二值基本运算性质

(1) 位移不变性（translation invariance）：
位移的结果不因位移的次序而异，或者说运算的结果与运算对象的位移无关

(2) 互换性（commutivity）：
运算过程中改变运算操作对象的先后次序对结果没有影响

(3) 组合性（associativity）：
运算过程中各个运算对象可按不同形式结合而不对结果产生影响

13.2.3　二值基本运算性质

(4) 增长性（increasing）：

如果$A \subseteq B$就有$\mathrm{MO}(A) \subseteq \mathrm{MO}(B)$

也称MO具有包含性或具有保持次序的性质

(5) 同前性（idempotency）：

$\mathrm{MO}^n(A) = \mathrm{MO}(A)$成立

MO运算多次，其结果与运算1次相同

(6) 外延性（extensive）/反外延性（anti~）

算符对集合运算的结果包含原集合

$\mathrm{MO}(A) \supseteq A$　　/　　$\mathrm{MO}(A) \subseteq A$

13.3　二值形态学组合运算

基本运算：

膨胀、腐蚀、开启、闭合

击中-击不中变换（hit or miss）

组合运算 [基本算法]

13.3.1　　击中-击不中变换

13.3.2　　二值组合运算

13.3.1 击中-击不中变换

击中-击不中变换

形状检测的一种基本工具

对应两个操作，所以用到两个结构元素

设A为原始图象，E和F为一对不重合的集合

$$A \Uparrow (E,F) = (A \ominus E) \cap (A^c \ominus F) = (A \ominus E) \cap (A \oplus F)^c$$

E：击中结构元素

F：击不中结构元素

13.3.1 击中-击不中变换

击中-击不中变换

具有位移不变性，但不具有增长性

两个结构元素要满足：$E \cap F = \varnothing$

击中结构元素　　击不中结构元素　　原始图象　　变换结果

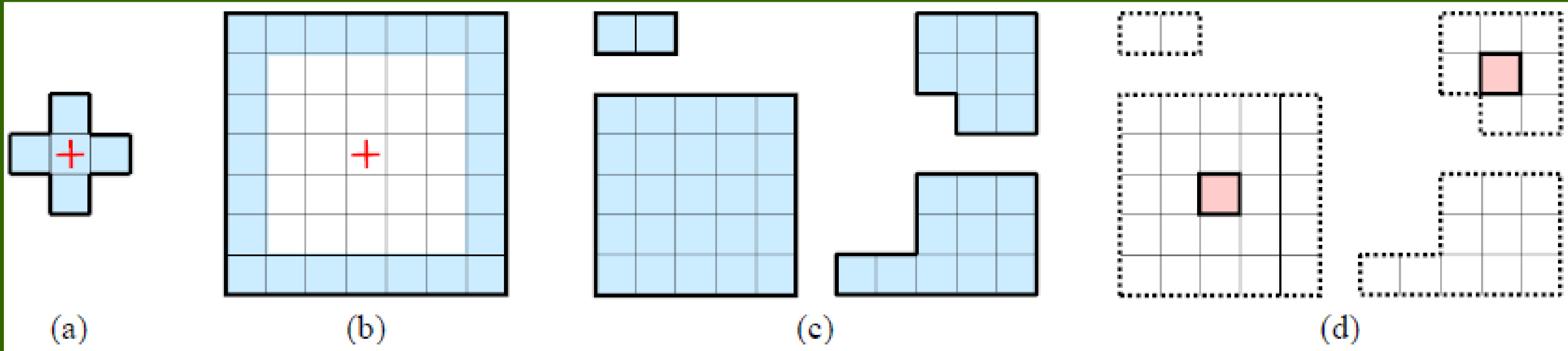


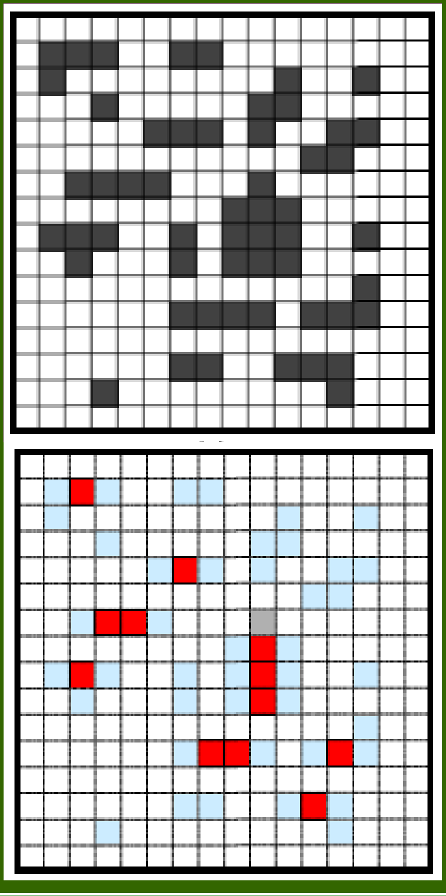
图 **13.3.1**　击中-击不中变换示例

13.3.1 击中-击不中变换

击中-击不中变换中结构元素的作用

任务：检测所有仅包含水平方向上有连续三个象素的线段

步骤：① 用对应待检测目标的 1×3 的模板 $M_1 = [1 \quad 1 \quad 1]$ 进行腐蚀可以消除所有比待检测目标小的其它区域并保留比模板大的区域

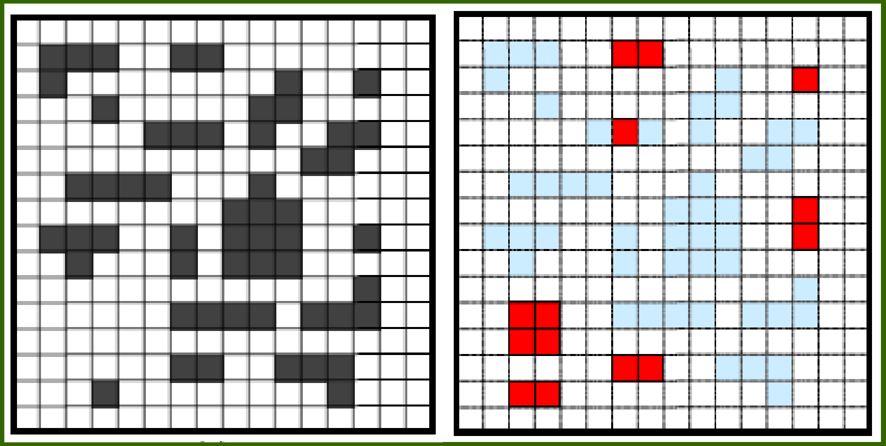


击中-击不中变换中结构元素的作用

上述腐蚀保留比模板大的所有区域（$M_1 \subseteq R$）

② 再对背景用一个 3×5的模板进行腐蚀

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



消除所有比待检测目标大的其它区域

13.3.1　击中-击不中变换

击中-击不中变换中结构元素的作用

如上腐蚀后的背景包含所有具有M_2或更大背景（$M_2 \subseteq R$）的象素

③　将用M_1腐蚀的目标与用M_2腐蚀的背景求交集就给出所有包含水平方向上有连续三个象素的线段的中心象素

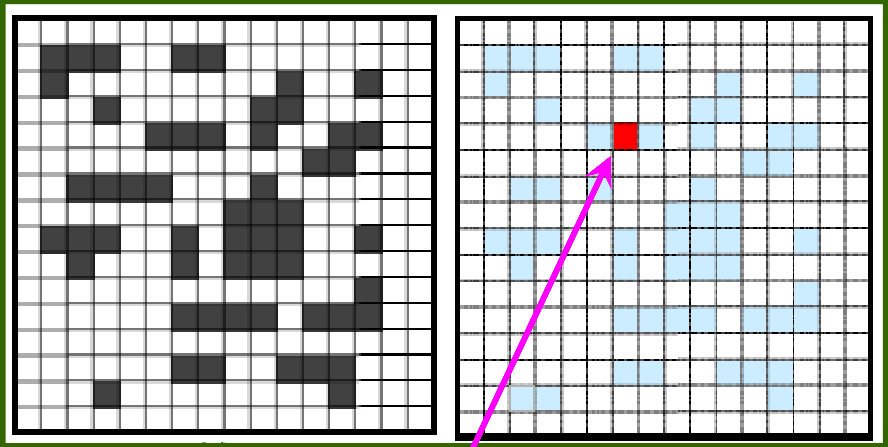


图13.3.3(f)
$A \Uparrow (M_1, M_3)$

13.3.2 二值组合运算

1. 区域凸包

令B_i，$i = 1, 2, 3, 4$，代表4个结构元素

构造（迭代式）：

$$X_i^k = \left(X_i^{k-1} \Uparrow B_i\right) \cup A \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \quad 和 \quad k = 1,\ 2,\ \cdots$$

令 $D_i = X_i^{\text{conv}}$

上标“conv”表示在 $X_i^k = X_i^{k-1}$ 意义下收敛

A的凸包可表示为：$\boxed{H(A) = \bigcup_{i=1}^{4} D_i}$

13.3.2 二值组合运算

2. 细化

用结构元素B细化集合A记作$A \otimes B$

借助击中-击不中变换定义

差集

$$A \otimes B = A - (A \Uparrow B) = A \bigcap (A \Uparrow B)^c$$

定义一个结构元素系列

$$\{B\} = \{B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n\}$$

$$\boxed{A \otimes \{B\} = A - ((\cdots((A \otimes B_1) \otimes B_2)\cdots) \otimes B_n)}$$

13.3.2　二值组合运算

3.　粗化

用结构元素B粗化集合A记作 $A \circledast B$

$$A \circledast B = A \bigcup (A \Uparrow B)$$

定义为一系列操作

$$\boxed{A \circledast \{B\} = ((\cdots((A \circledast B_1) \circledast B_2)\cdots) \circledast B_n)}$$

粗化从形态学角度来说与细化对应，实际中可先细化背景然后求补以得到粗化的结果。换句话说，如果要粗化集合A，可先构造$C = A^c$，然后细化C，最后求C^c

{例13.3.6}

13.3.2　二值组合运算

3.　粗化

粗化与细化是对偶的（变换）

令击中击不中变换中的结构元素$(E, F) = B$

则对偶关系可表示为

$$(A \otimes B)^c = A^c \odot \overset{\frown}{B} \qquad \overset{\frown}{B} = (F, E)$$

$$(A \odot B)^c = A^c \otimes \overset{\frown}{B} \qquad \overset{\frown}{B} = (F, E)$$

在 $\overset{\frown}{B}$ 中，击中和击不中结构元素对调

13.3.2　二值组合运算

4.　剪切

- 先对 A 细化三次得到(d)　$X_1 = A \otimes \{B\}$
- 构造一个包含 X_1 中所有端点的集合(e)　$X_2 = \bigcup_{k=1}^{8} (X_1 \Uparrow B_k)$
- 用 A 作为限制将端点膨胀3次(f)　$X_3 = (X_2 \oplus H) \bigcap A$
- 最后将 X_1 和 X_3 求并集(g)　$\boxed{X_4 = X_1 \bigcup X_3}$

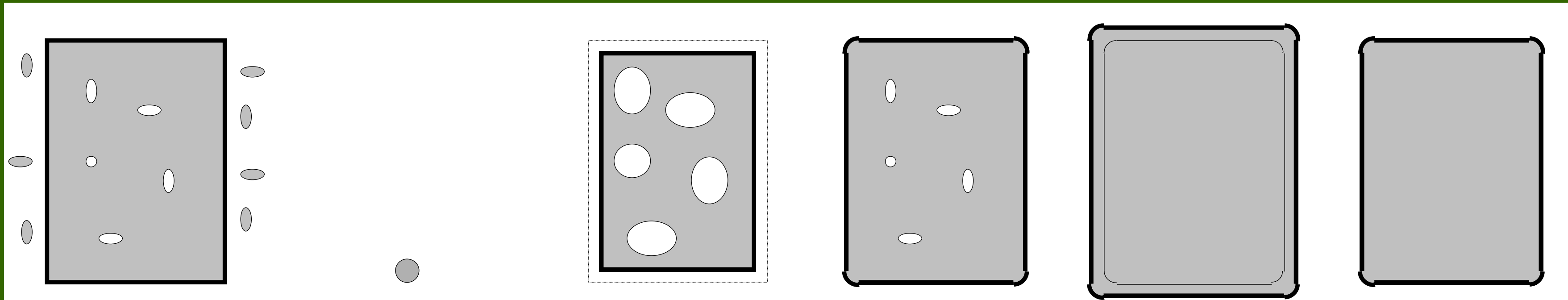
13.4 二值形态学实用算法

1. 噪声滤除

先开启后闭合

$$\boxed{(A \circ B) \bullet B = \{[(A \ominus B) \oplus B] \oplus B\} \ominus B}$$

腐蚀　　膨胀　　膨胀　　腐蚀



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)　(f)

13.4　二值形态学实用算法

2.　角点检测

非对称闭合：用一个结构元素对图象进行膨胀后再用另一个结构元素对图象进行腐蚀

对A的操作　$A^{c}_{+\Diamond} = (A \oplus +) \ominus \Diamond$

角点强度

$C_{+}(A) = |A - A^{c}_{+\Diamond}|$

$C_{\times}(A) = |A - A^{c}_{\times\Box}|$　转45°

角点检测　$\boxed{C_{+\times}(A) = |A^{c}_{+\Diamond} - A^{c}_{\times\Box}|}$

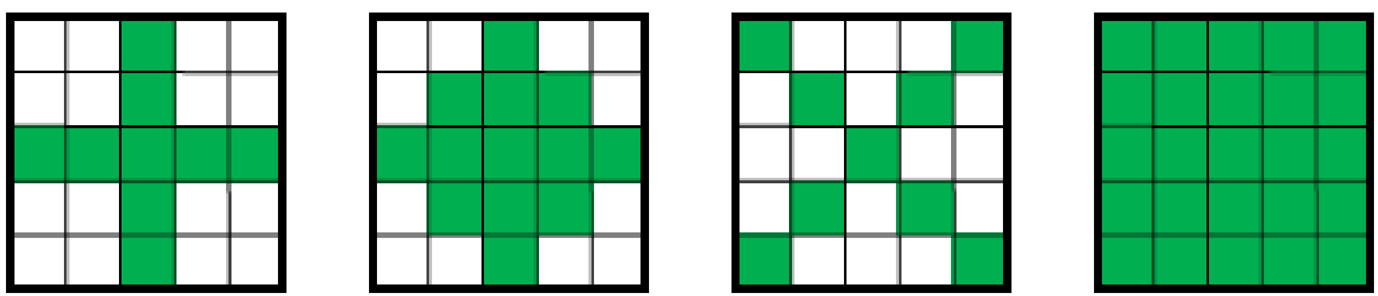


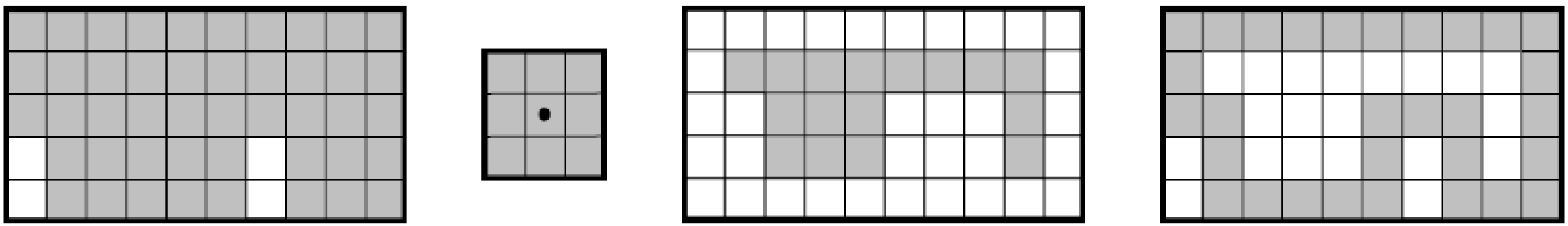
图 13.4.2　4 个结构元素，依次为+，◇，×，□

13.4 二值形态学实用算法

3. 边界提取

先用1个结构元素B腐蚀 A，再求取腐蚀结果与A的差集就可得到边界$\beta(A)$

$$\boxed{\beta(A) = A - (A \ominus B)}$$



(a) (b) (c) (d)

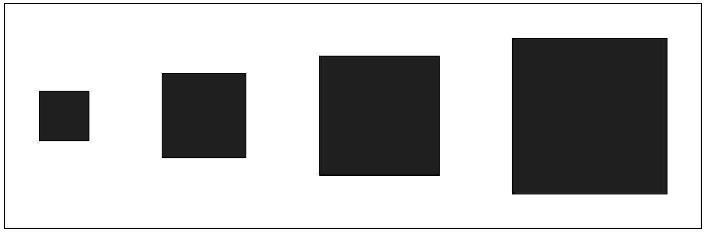
图 13.4.3 边界提取示例

结构元素是8-连通的，而所得到的边界是4-连通的

13.4 二值形态学实用算法

4. 目标检测和定位

原始图象：包含3×3，5×5，7×7和9×9的四个实心正方形



(a)

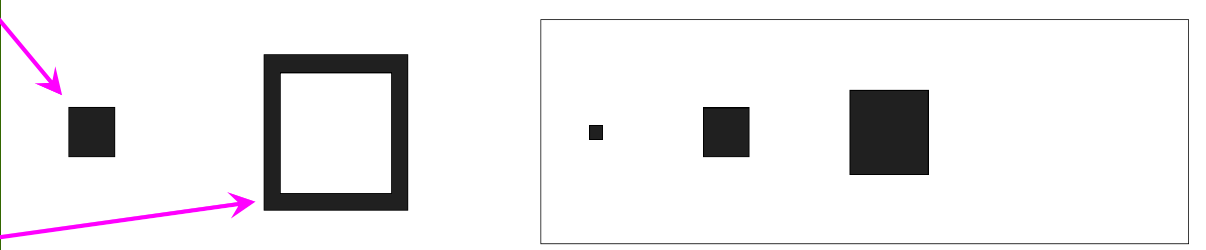
击中-击不中变换：

3×3实心正方形

大于等于3×3

9×9空心方框

小于等于7×7



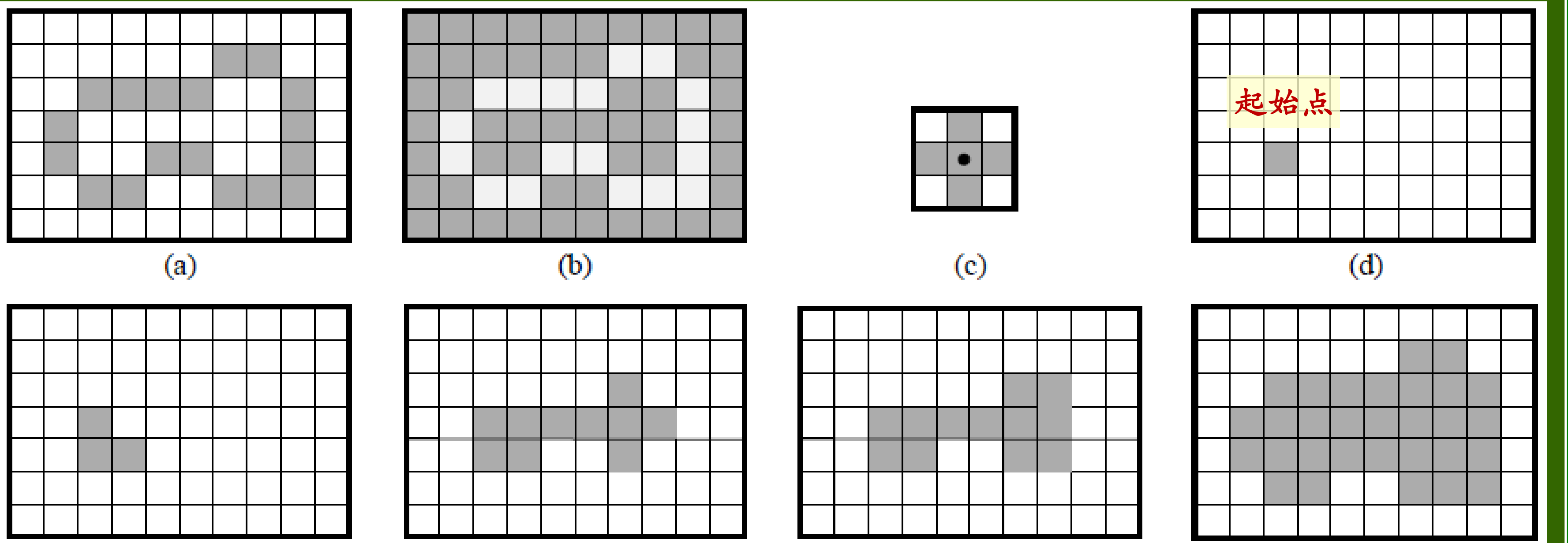
(b) (c) (d)

5. 区域填充

条件膨胀

找背景

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$



(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) $X_k = X_{k-1}$ (h)

结构元素是4-连通的，而原被填充的边界是8-连通的

13.4 二值形态学实用算法

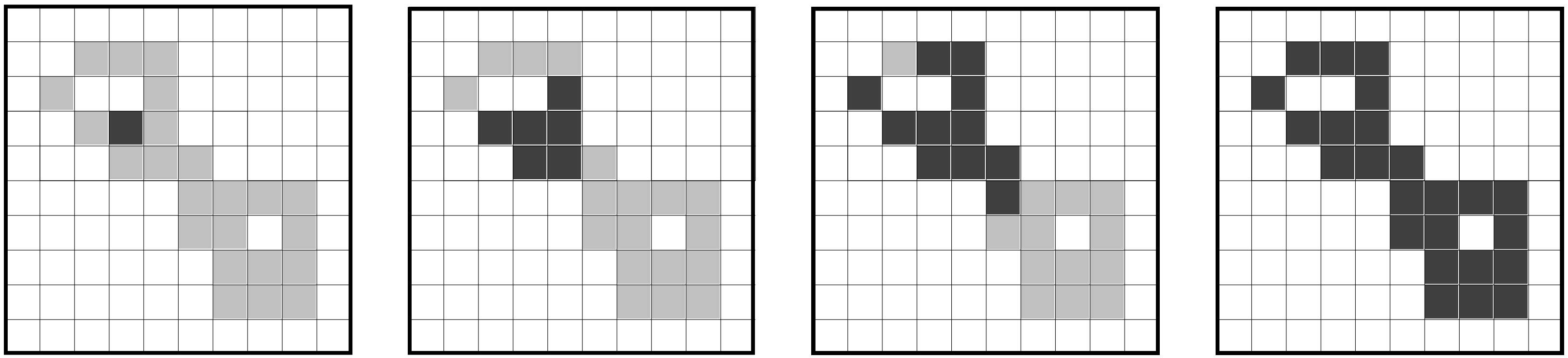
6. 连通组元提取

考虑集合A中的一个连通组元，已知其中一个点，那么可用下列迭代公式得到其全部元素

$$\boxed{X_k = \left(X_{k-1} \oplus B\right) \cap A \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots}$$

找前景

当$X_k = X_{k-1}$时停止迭代，X_k给出连通组元



(a) (b) (c) (d)

13.4 二值形态学实用算法

7. 区域骨架计算

A的骨架：

$$\boxed{S(A)=\bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)}$$

骨架子集：

$$S_k(A)=(A\ominus kB)-[(A\ominus kB)\circ B]$$

$(A\ominus kB)$代表连续k次用B对A腐蚀，可用T_k表示

$$T_k=(A\ominus kB)=((\cdots(A\ominus B)\ominus B)\ominus\cdots)\ominus B$$

K代表将A腐蚀成空集前的最后一次迭代次数

$$K=\max\{k\mid(A\ominus kB)\neq\varnothing\}$$

13.4 二值形态学实用算法

7. 区域骨架计算

A可用$S_k(A)$重构：

$$A = \bigcup_{k=0}^{K} \left(S_k(A) \oplus kB \right)$$

$$\left(S_k(A) \oplus kB \right) = ((\cdots(S_k(A) \oplus B) \oplus B) \oplus \cdots) \oplus B$$

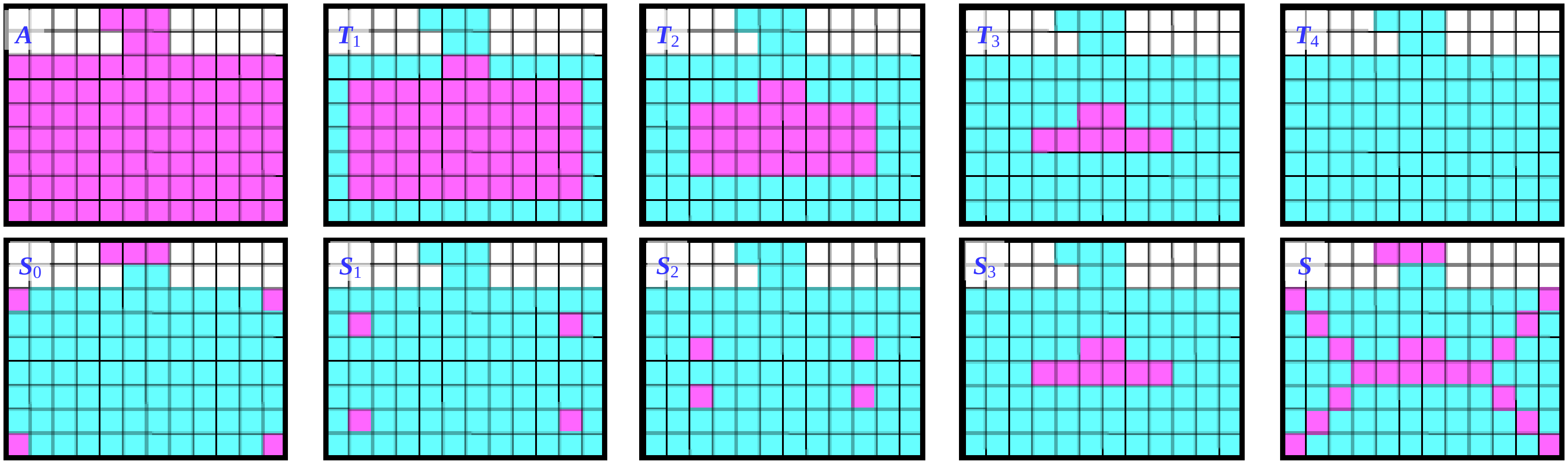


图 13.4.7 形态学骨架示例

{表13.4.1}

联　系　信　息

- 通信地址：北京清华大学电子工程系
- 邮政编码：100084
- 办公地址：清华大学，罗姆楼，6层305室
- 办公电话：(010) 62798540
- 传真号码：(010) 62770317
- 电子邮件：zhang-yj@tsinghua.edu.cn
- 个人主页：oa.ee.tsinghua.edu.cn/~zhangyujin/