

# 图 象 理 解

（第4版）

章毓晋

清华大学电子工程系 100084 北京

## 第1单元 采集表达

第2章 摄像机成像

第3章 压缩感知与成像

第4章 深度信息采集

➤ 第5章 3-D景物表达

✓ 从图象出发，认识和理解世界

需要获得能反映场景内容和本质的图象

需要用尽少的采样精确地重构原信号

需要采集含有全面立体信息的图象

需要有对3-D空间景物的3-D表达方法

## 第5章 3-D景物表达

5.1 曲线和曲面的局部特征

5.2 3-D表面表达

5.3 等值面的构造和表达

5.4 从并行轮廓插值3-D表面

5.5 3-D实体表达

## 5.1 曲线和曲面的局部特征

曲线和曲面是构成3-D实体的重要组件

5.1.1 曲线局部特征

5.1.2 曲面局部特征

微分几何是研究曲线和曲面局部特征的重要工具

### 5.1.1 曲线局部特征

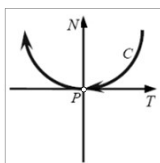
#### 1. 曲线点分类

一条曲线 $C$ 通过空间一个点 $P$

通过点 $P$ 且与曲线 $C$ 相切的直线 $T$ 称为曲线 $C$ 在点 $P$ 的切线（切线是割线的极限）

切线 $T$ 与曲线 $C$ 在点 $P$ 的接触比任何其它直线与曲线 $C$ 在点 $P$ 的接触都要密切

与点 $P$ 的切线 $T$ 相垂直且通过点 $P$ 的直线 $N$ 是曲线 $C$ 在点 $P$ 的法线

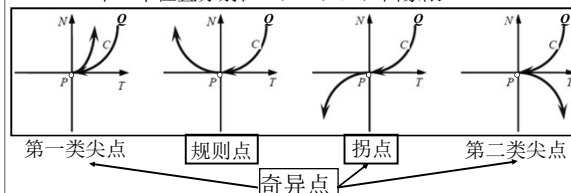


### 5.1.1 曲线局部特征

#### 1. 曲线点分类

一个在第一象限中的点 $Q$ 沿曲线 $C$ 向 $P$ 点移动，当它到达 $P$ 点后继续运动，那它的下一个位置会有四种情况

下一个位置分别在一，二，三，四象限



## 5.1.1 曲线局部特征

### 2. 高斯图

- 让点 $P$ 遍历曲线 $C$ 并且依次将曲线 $C$ 上的各个点 $P$ 与单位圆周上的各个点 $Q$ 对应起来
- 使通过各个点 $P$ 的单位法线矢量与从单位圆心出发的终点为 $Q$ 的矢量对应

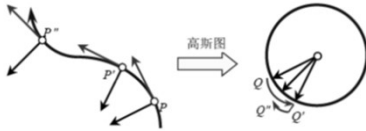


图 5.1.3 平面曲线的高斯图

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第7页

## 5.1.1 曲线局部特征

### 2. 高斯图

- 点 $P'$ 和点 $P$ 处的法线间的夹角
- 单位圆周上连接 $Q'$ 和 $Q$ 的弧长
- 点遍历曲线方向 vs. 沿高斯图单位圆遍历方向

表 5.1.1 曲线点分类表

分类	点沿曲线遍历方向不变	点沿曲线遍历方向反转变
高斯图上点沿单位圆运动方向不变	规则点	第1类尖点
高斯图上点沿单位圆运动方向反转变	拐点	第2类尖点

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第8页

## 5.1.1 曲线局部特征

### 3. 空间曲线

{P.110}

曲线 $C$ 在 $P$ 点的曲率中心为 $O$

- $N$ : 法平面
- $T$ : 密切平面
- $R$ : 校正平面
- $n$ : 主法线矢量
- $t$ : 切线矢量
- $b$ : 副法线矢量

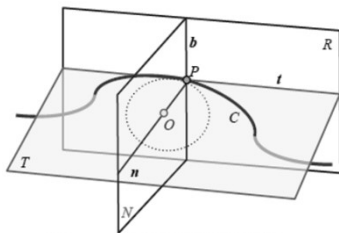


图 5.1.4 空间曲线的局部几何

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

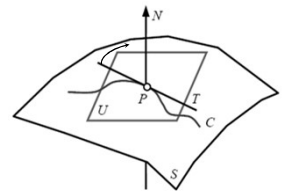
第9页

## 5.1.2 曲面局部特征

### 1. 表面法截线

反映了表面 $S$ 上一点 $P$ 附近的性质

- 平面 $U$ 是过表面 $S$ 上一点 $P$ 的切平面
- 通过点 $P$ 且与表面 $S$ 垂直的直线 $N$ 称为表面 $S$ 在点 $P$ 处的法线
- 在表面上的每一点，只有唯一的一条法线，但可以有无数条切线



第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

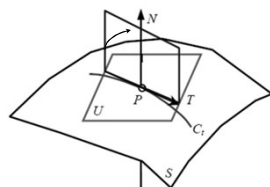
第10页

## 5.1.2 曲面局部特征

### 1. 表面法截线

通过表面 $S$ 在点 $P$ 处的法线只有一条，但包含该法线的平面（同时也包含一条切线）可以有无数个

这些平面与表面 $S$ 的交线构成一个单参数平面曲线族，可称为法截线族。法截线 $C_t$ 在点 $P$ 处的曲率称为表面 $S$ 在点 $P$ 处相应切线方向上的法曲率



第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第11页

## 5.1.2 曲面局部特征

### 2. 表面主法曲率

法截线在表面上点 $P$ 处的法曲率在绕法线的某个方向上会取得最大值 $K_1$ ，而在某个方向上会取得最小值 $K_2$ 。一般将这两个方向称为表面 $S$ 在点 $P$ 处的主方向，可以证明它们是互相正交的

- 如果两个主法曲率的符号相同，则点 $P$ 处的邻域面是椭圆形的
- 如果两个主法曲率的符号相反，则点 $P$ 处的邻域面是双曲形的

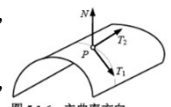


图 5.1.6 主曲率方向

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第12页

## 5.1.2 曲面局部特征

### 3. 平均曲率和高斯曲率

平均曲率:  $H = (K_1 + K_2) / 2 = \text{Tr}(K) / 2$

确定表面是否局部凸(负)或凹(正)

高斯曲率:  $G = K_1 K_2 = \det(K)$

确定表面是否局部双曲(负)或椭圆(正)

表 5.1.2 由高斯曲率  $G$  和均值曲率  $H$  确定的 8 种表面类型

	$H < 0$	$H = 0$	$H > 0$
$G < 0$	鞍脊	最小/迷向	鞍谷
$G = 0$	山脊/脊面	平面	山谷/谷面
$G > 0$	峰/顶面		凹坑

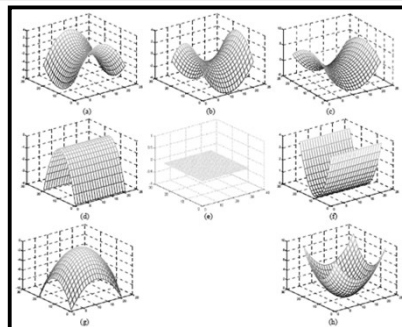
第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第13页

## 5.1.2 曲面局部特征

	$H < 0$	$H = 0$	$H > 0$
$G < 0$	鞍脊	迷向	鞍谷
$G = 0$	山脊	平面	山谷
$G > 0$	顶面		凹坑



第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第14页

## 5.2 3-D表面表达

当人们观察3-D场景时, 首先看到的是由一组曲面构成的物体的外表面

为表达3-D物体的外表面和描述它们的形状, 可利用物体的外轮廓线或外轮廓面

### 5.2.1 参数表达

### 5.2.2 表面朝向表达

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第15页

## 5.2.1 参数表达

### 1. 曲线的参数表达

$$P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T \quad 0 \leq t \leq 1$$

为了表示通用的曲线, 使参数样条的一阶和二阶导数连续,  $P(t)$ 的阶数至少为3

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$a = [a_x \ a_y \ a_z]^T \quad b = [b_x \ b_y \ b_z]^T \quad \{P.114\}$$

$$c = [c_x \ c_y \ c_z]^T \quad d = [d_x \ d_y \ d_z]^T$$

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第16页

## 5.2.1 参数表达

### 2. 曲面的参数表达

$$P(u, v) = [x(u, v) \ y(u, v) \ z(u, v)]^T \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

一个3-D表面的显式表达形式为

$$z = f(x, y)$$

双线性 (bi-linear)  $z = a_0 + a_1x + a_2y$

双二次 (bi-quadratic)  $z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2$

双三次 (bi-cubic)

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3$$

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

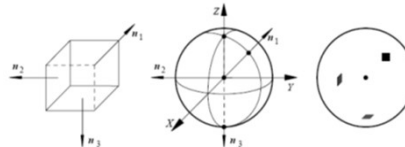
第17页

## 5.2.2 表面朝向表达

### 1. 扩展高斯图

扩展高斯图给出目标表面法线的分布

**高斯球:** 将3-D目标表面的一点对应到球面上具有相同表面法线的点得到。在高斯球上各点都放置与对应表面面积数值上相等的质量就得到扩展高斯图



第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第18页

## 5.2.2 表面朝向表达

### 1. 扩展高斯图

- 推广到光滑的曲面

高斯曲率:  $G = \lim_{\delta O \rightarrow 0} \frac{\delta S}{\delta O} = \frac{dS}{dO}$  高斯球上区域  
目标上区域

积分曲率:  $\iint_O G dO = \iint_S dS = S$

- 可用高斯曲率的倒数定义扩展高斯图

$$\iint_S \frac{1}{G} dS = \iint_O dO = O \quad G_e(p, q) = \frac{1}{G(u, v)} \quad \text{目标非凸体 } \{P.116\}$$

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

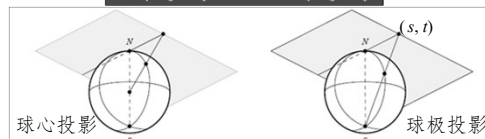
第19页

## 5.2.2 表面朝向表达

### 2. 球心投影和球极投影

- 物体的表面朝向有两个自由度
- 为指定面元的朝向, 还可使用梯度  $(p, q)$
- 将高斯球投影到一个平面上以得到梯度空间

$$p = \frac{4s}{4-s^2-t^2} \quad \text{和} \quad q = \frac{4t}{4-s^2-t^2}$$



第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第20页

## 5.3 等值面的构造和表达

3-D图象的基本单元是体素。如果一个目标的轮廓体素具有某个确定的灰度值, 那么这些体素点将构成一个等值表面, 它是该目标与其他目标或背景的分界面

### 5.3.1 行进立方体算法

### 5.3.2 覆盖算法

第5讲

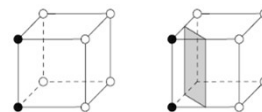
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第21页

## 5.3.1 行进立方体算法

### 基本单元:

由8个体素  
构成顶点  
的立方体



### 边界立方体:

该立方体的8个体素中有的属于前景有的属于背景。等值面应在边界立方体中

算法逐次检查每个体素, 从一个立方体行进到另一个相邻的立方体

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第22页

## 5.3.1 行进立方体算法

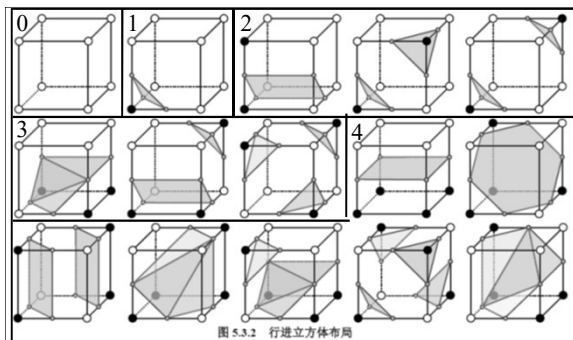


图 5.3.2 行进立方体布局

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第23页

## 5.3.1 行进立方体算法

- 有歧义的行进立方体布局 (6种)

互补  
布局

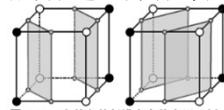


图5.3.4 {P.119}  
另5种互补布局

图 5.3.3 有歧义的行进立方体布局示例

- 没有歧义, 但也得不到封闭的目标表面

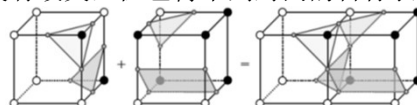


图 5.3.5 从行进立方体没有得到封闭的目标表面

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第24页

### 5.3.1 行进立方体算法

#### ● 三角形面元的不同组合

用两个三角形来连接4个顶点并构成目标的表面部分可有两种方法，所得到的表面积和表面朝向都不相同

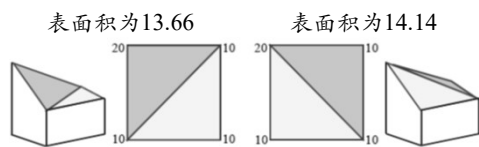


图 5.3.6 两种三角形面元的组合

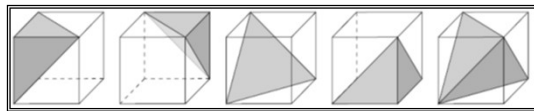
第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第25页

### 5.3.2 覆盖算法

将每个立方体分解成5个四面体，其中4个四面体有相同长度的边缘，而第5个四面体具有相同尺寸的表面（最右边那个）



属于四面体的体素看作在目标的内部，而不属于四面体的体素看作在目标的外部

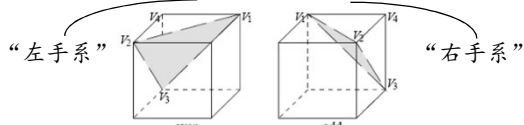
第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第26页

### 5.3.2 覆盖算法

- 对立方体的四面体分解有两种方案分别称为“偶方案”和“奇方案”



- 对体素网格的分解是按奇偶相间来进行的，这样可以保证在相邻立方体中的四面体可以互相匹配以最后得到协调一致的表面

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第27页

### 5.3.2 覆盖算法

#### 确定是否目标表面与四面体相交

- 每个四面体都包含4个体素
- 估计在与目标表面相交的四面体中，目标表面与四面体各面（多边形）相交的边界
- 对每对边界两端的顶点可进行插值以逼近获得在连接每对顶点的边上的交点
- 考虑对角边缘，设四个顶点的灰度值分别为  $a, b, c, d$ ，得到的插值结果为：

$$I(u) = (a + b - c + d)^2 u^2 + (-2a + b + c)u + a$$

第5讲

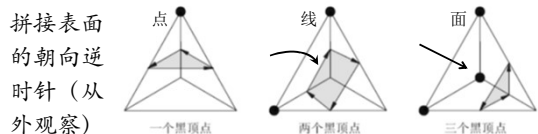
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第28页

### 5.3.2 覆盖算法

#### 确定目标表面与四面体的相交位置

- 估计在与目标表面相交的四面体中，目标表面与四面体各面（多边形）相交的边界
- 计算每对边界两端顶点之间边上的交点
- 用交点确定表面拼接后的顶点



第5讲

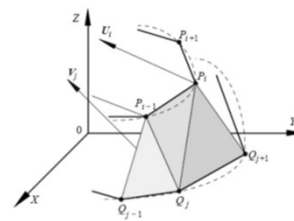
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第29页

### 5.4 从并行轮廓插值3-D表面

#### 1. 轮廓插值

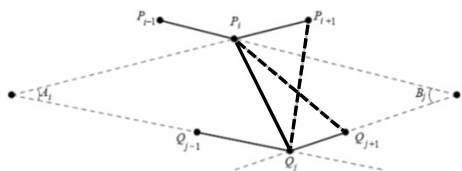
- 根据一系列并行轮廓线重建3-D目标表面
  - 三角形面元内插
- 从相邻的两个多边形上确定一个初始顶点对
  - 已知一个顶点对的基础上选取下一个相邻顶点对



## 5.4 从并行轮廓插值3-D表面

### 顶点选取（边最短最垂直）

- (1) 如果  $\cos A_i > T$ , 选  $P_{i+1}$
- (2) 如果  $\cos A_i \leq T$ , 且  $\cos B_i > T$ , 选  $Q_{j+1}$
- (3) 否则考虑距离因素, 选  $P_{i+1}$



第5讲

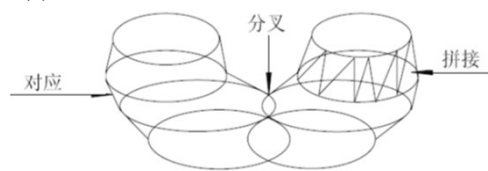
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第31页

## 5.4 从并行轮廓插值3-D表面

### 2. 可能遇到的问题

- (1) 对应问题（两个层次：轮廓间，点间）
- (2) 拼接问题（产生一组优化的三角面片）
- (3) 分支/分叉问题（需利用整体几何信息）



第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第32页

## 5.4 从并行轮廓插值3-D表面

### 3. Delaunay三角剖分和邻域Voronoi图

- Voronoi图和Delaunay三角形互为对偶
- 对任意一对点 $p$ 和 $q$ , 在它们之间画一条对分线。这条对分线将图象分成两部分, 其中一部分包含与 $p$ 比较近的点而另一部分包含与 $q$ 比较近的点
- 如果对所有的 $q$ 都如上进行, 就可得到包含 $p$ 的多边形, 也称Voronoi多边形。对所有点的Voronoi多边形构成Voronoi图

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第33页

## 5.4 从并行轮廓插值3-D表面

### 3. Delaunay三角剖分和邻域Voronoi图

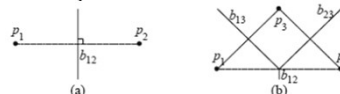


图 5.4.4 构建 Voronoi 图的垂直二分线方法

使得到的每个三角形尽可能接近等边三角形

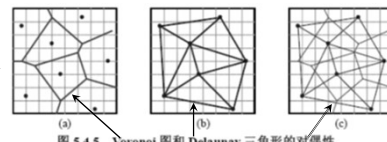


图 5.4.5 Voronoi 图和 Delaunay 三角形的对偶性

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第34页

## 5.5 3-D实体表达

对真实世界中的绝大部分物体来说, 尽管通常只能看到它们的表面, 它们实际上都是3-D实体

### 5.5.1 基本表达方案

### 5.5.2 广义圆柱体表达

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

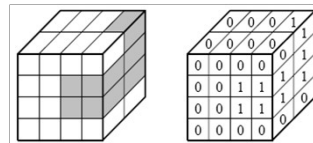
第35页

## 5.5.1 基本表达方案

### 1. 空间占有数组

对图象 $f(x, y, z)$ 中任一点 $(x, y, z)$ , 如果它在给定实体内, 取 $f(x, y, z)$ 为1, 否则为0

所有 $f(x, y, z)$ 为1的点组成的集合就代表了所要表达的物体



第5讲

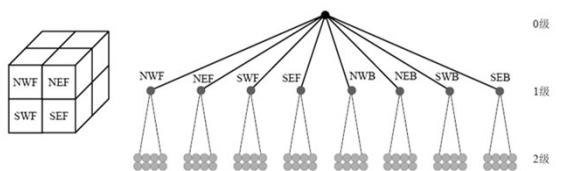
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第36页

### 5.5.1 基本表达方案

#### 2. 单元分解

- 基本思路是将物体逐步分解，直至分解到可以统一表达的基本单元
- 八叉树 (oct-tree) 法是一种常用的单元分解法



第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

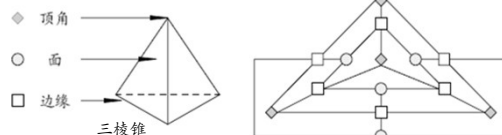
第37页

### 5.5.1 基本表达方案

#### 2. 单元分解

- 八叉树节点总数 $N$ 最多为

#### 表面分解



第5讲

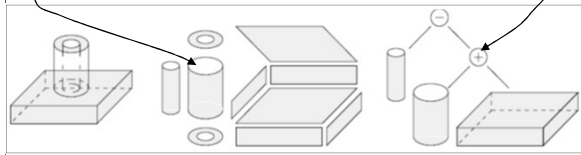
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第38页

### 5.5.1 基本表达方案

#### 3. 几何模型法

- 边界表达系统**: 用各个边界面的并集表示物体
- 结构刚体几何表达系统**: 刚体通过一组集合操作被表示成另外一些简单刚体的组合



第5讲

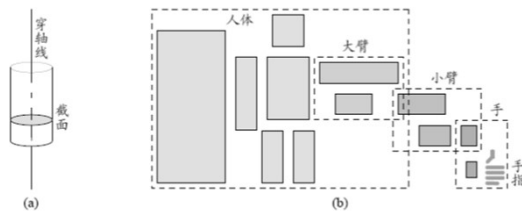
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第39页

### 5.5.2 广义圆柱体表达

用一个2-D集合沿某一条3-D曲线运动

两个基本的单元: 一根穿轴线和一个沿穿轴线移动的一定形状的截面。不同单元可逐级组合



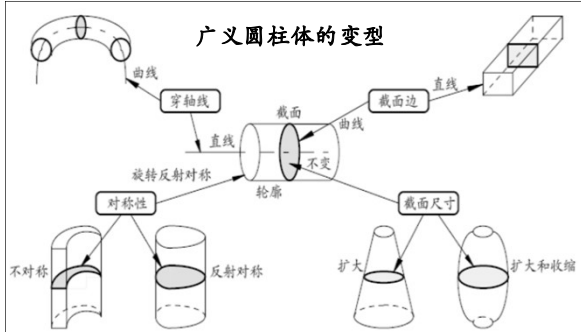
第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第40页

### 5.5.2 广义圆柱体表达

#### 广义圆柱体的变型



第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第41页

### 联系信息



- 通信地址: 北京清华大学电子工程系
- 邮政编码: 100084
- 办公地址: 清华大学, 罗姆楼, 6层305室
- 办公电话: (010) 62798540
- 传真号码: (010) 62770317
- 电子邮件: [zhang-yj@tsinghua.edu.cn](mailto:zhang-yj@tsinghua.edu.cn)
- 个人主页: [oa.ee.tsinghua.edu.cn/~zhangyujin/](http://oa.ee.tsinghua.edu.cn/~zhangyujin/)

第5讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第42页