

# 图 象 分 析

（第4版）

章毓晋

清华大学电子工程系 100084 北京

## 第4单元 数学工具

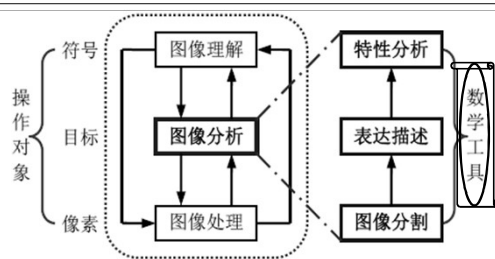


图 1.2.2 图像分析主要功能模块

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第2页

## 第4单元 数学工具

- 第13章 数学形态学：二值
  - 第14章 数学形态学：灰度
  - 第15章 图象识别
- 数学及其他学科理论和工具的支持
- 数学形态学表示以形态为基础对图象进行分析的数学工具
- 操作对象可以是二值或灰度图象
- 图象模式识别（简称图象识别）

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第3页

## 第13章 数学形态学：二值

- 形态学（morphology）一般指生物学中研究动物和植物结构的一个分支
- 形态学因子/要素（morphological factor）指不包含单位的数或特性
- 数学形态学（也有称图象代数的）表示以形态为基础对图象进行分析的数学工具
- 数学形态学的数学基础和所用语言是集合论
- 数学形态学的基本运算在二值图象中和灰度（多值）图象中各有特点

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第4页

## 第13章 数学形态学：二值

- 13.1 基本集合定义
- 13.2 二值形态学基本运算
- 13.3 二值形态学组合运算
- 13.4 二值形态学实用算法

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第5页

## 13.1 基本集合定义

名词/概念：

- (1) 集合：用大写字母表示，空集记为 $\emptyset$
- (2) 元素：用小写字母表示
- (3) 子集： $A \subseteq B$ （读作A包含于B）
- (4) 并集： $A \cup B$  ( $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$  或  $x \in B$ )
- (5) 交集： $A \cap B$  ( $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$  且  $x \in B$ )

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第6页

## 13.1 基本集合定义

(6) 补集:  $A^c = \{x \mid x \notin A\}$

(7) 位移:  $(A)_x = \{y \mid y = a + x, a \in A\}$

(8) 映像:  $\hat{A} = \{x \mid x = -a, a \in A\}$

(9) 差集:  $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第7页

## 13.2 二值形态学基本运算

**集合运算:**

$A$  为图象集合,  $B$  为结构元素 (集合)

数学形态学运算是用  $B$  对  $A$  进行操作

结构元素要指定1个原点 (参考点)

**13.2.1 二值膨胀和腐蚀**

**13.2.2 二值开启和闭合**

**13.2.3 二值基本运算性质**

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第8页

### 13.2.1 二值膨胀和腐蚀

**1. 膨胀**

膨胀的算符为  $\oplus$

$A \oplus B = \{x \mid [(B)_x \cap A] \subseteq A\}$

集合  $A$     结构元素  $B$      $B$  的映像    集合  $A \oplus B$

图 13.2.1 膨胀运算示例

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第9页

### 13.2.1 二值膨胀和腐蚀

**2. 腐蚀**

腐蚀的算符为  $\ominus$

$A \ominus B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$

集合  $A$     结构元素  $B$     集合  $A \ominus B$

图 13.2.2 腐蚀运算示例

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第10页

### 13.2.1 二值膨胀和腐蚀

**3. 用向量运算实现膨胀和腐蚀**

$A \oplus B = \{x \mid x = a + b \text{ 对某些 } a \in A \text{ 和 } b \in B\}$

$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4)\}$

$B = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$

$A \oplus B = \{(1, 1), (2, 1); (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2); (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3); (2, 4), (3, 4); (2, 5)\}$

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第11页

### 13.2.1 二值膨胀和腐蚀

**3. 用向量运算实现膨胀和腐蚀**

$A \ominus B = \{x \mid (x + b) \in A \text{ 对每一个 } b \in B\}$

$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4)\}$

$B = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$

$A \ominus B = \{(2, 2), (2, 3)\}$

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第12页

13.2.1 二值膨胀和腐蚀

4. 用位移运算实现膨胀和腐蚀

膨胀

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$$

$$A \subset A \oplus B$$

原点不属于结构元素

按每个**b**来位移A并把结果并（OR）起来

结构元素(b)

只有两个象素

图 13.2.3 膨胀的位移运算示例

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第13页

13.2.1 二值膨胀和腐蚀

4. 用位移运算实现膨胀和腐蚀

腐蚀

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$$

按每个**b**来负位移A并把结果交（AND）起来

图 13.2.4 腐蚀的位移运算示例

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第14页

13.2.1 二值膨胀和腐蚀

5. 膨胀和腐蚀的对偶性

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus B$$

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus B$$

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第15页

13.2.1 二值膨胀和腐蚀

6. 二值膨胀和腐蚀的结合

还

与集合运算结合

(1) 并集的膨胀等于膨胀的并集

(2) 并集的腐蚀包含了腐蚀的并集

(3) 交集的膨胀包含在膨胀的交集中

(4) 交集的腐蚀等于腐蚀的交集

$$B \oplus (A_1 \cup A_2) = (A_1 \cup A_2) \oplus B = (A_1 \oplus B) \cup (A_2 \oplus B)$$

$$(A_1 \cup A_2) \ominus B \supseteq (A_1 \ominus B) \cup (A_2 \ominus B) \quad B \ominus (A_1 \cup A_2) = (A_1 \ominus B) \cap (A_2 \ominus B)$$

$$B \oplus (A_1 \cap A_2) = (A_1 \cap A_2) \oplus B \subseteq (A_1 \oplus B) \cap (A_2 \oplus B)$$

$$(A_1 \cap A_2) \ominus B = (A_1 \ominus B) \cap (A_2 \ominus B)$$

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第16页

13.2.1 二值膨胀和腐蚀

6. 二值膨胀和腐蚀的结合

还

与逻辑运算结合

先将标签文字进行膨胀，再将结果与原始文字进行XOR运算，获得中间镂空的标签，可用于覆盖在全黑或全白的图象区域上方进行标注

原始文字

Label 标签

镂空标签

Label 标签

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第17页

13.2.2 二值开启和闭合

1. 定义

膨胀和腐蚀并不互为逆运算！

它们可以级连结合使用

开启：先对图象进行腐蚀然后膨胀其结果

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

闭合：先对图象进行膨胀然后腐蚀其结果

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第18页

3

13.2.2 二值开启和闭合

### 2. 几何解释

填充性质:  $A \circ B = \bigcup \{ (B)_x | (B)_x \subset A \}$

图 13.2.10 开启的填充特性

图 13.2.11 闭合的几何解释 (背景填充)

第13讲
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN
第19页

13.2.2 二值开启和闭合

### 3. 二值开启和闭合的对偶性

开启和闭合的对偶性表示为

$$(A \circ B)^c = A^c \cdot \hat{B}$$

$$(A \cdot B)^c = A^c \circ \hat{B}$$

证明:

$$(A \circ B)^c \stackrel{(13.2.10)}{=} [(A \oplus B) \oplus B]^c \stackrel{(13.2.11)}{=} (A \oplus B)^c \oplus \hat{B} \stackrel{(13.2.13)}{=} A^c \oplus \hat{B} \oplus \hat{B} = A^c \cdot \hat{B}$$

$$(A \cdot B)^c \stackrel{(13.2.10)}{=} [(A \oplus B) \ominus B]^c \stackrel{(13.2.11)}{=} (A \oplus B)^c \oplus \hat{B} = A^c \oplus \hat{B} \oplus \hat{B} = A^c \cdot \hat{B}$$

第13讲
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN
第20页

13.2.3 二值基本运算性质

- (1) 位移不变性 (translation invariance): 位移的结果不因位移的次序而异, 或者说运算的结果与运算对象的位移无关
- (2) 互换性 (commutativity): 运算过程中改变运算操作对象的先后次序对结果没有影响
- (3) 组合性 (associativity): 运算过程中各个运算对象可按不同形式结合而不对结果产生影响

第13讲
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN
第21页

13.2.3 二值基本运算性质

- (4) 增长性 (increasing): 如果  $A \subseteq B$  就有  $MO(A) \subseteq MO(B)$  也称MO具有包含性或具有保持次序的性质
- (5) 同前性 (idempotency):  $MO^n(A) = MO(A)$  成立 MO运算多次, 其结果与运算1次相同
- (6) 外延性 (extensive) / 反外延性 (anti~): 算符对集合运算的结果包含原集合  $MO(A) \supseteq A \quad / \quad MO(A) \subseteq A$

第13讲
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN
第22页

13.3 二值形态学组合运算

### 基本运算:

膨胀、腐蚀、开启、闭合  
击中-击不中变换 (hit or miss)

### 组合运算 [基本算法]

#### 13.3.1 击中-击不中变换

#### 13.3.2 二值组合运算

第13讲
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN
第23页

13.3.1 击中-击不中变换

### 击中-击不中变换

形状检测的一种基本工具  
对应两个操作, 所以用到两个结构元素  
设  $A$  为原始图象,  $E$  和  $F$  为一对不重合的集合

$$A \uparrow (E, F) = (A \ominus E) \cap (A^c \ominus F) = (A \ominus E) \cap (A \oplus F)^c$$

$E$ : 击中结构元素  
 $F$ : 击不中结构元素

第13讲
章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN
第24页

### 13.3.1 击中-击不中变换

#### 击中-击不中变换

具有位移不变性，但不具有增长性  
两个结构元素要满足： $E \cap F = \emptyset$

击中  
结构元素

(a)

击不中  
结构元素

(b)

原始图像

(c)

变换结果

(d)

图 13.3.1 击中-击不中变换示例

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第25页

### 13.3.1 击中-击不中变换

#### 击中-击不中变换中结构元素的作用

**任务：**检测所有仅包含水平方向上有连续三个像素的线段

**步骤：**① 用对应待检测目标的  $1 \times 3$  的模板  $M_1 = [1 \ 1 \ 1]$  进行腐蚀可以消除所有比待检测目标小的其它区域并保留比模板大的区域

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第26页

### 13.3.1 击中-击不中变换

#### 击中-击不中变换中结构元素的作用

上述腐蚀保留比模板大的所有区域 ( $M_1 \subseteq R$ )

② 再对背景用一个  $3 \times 5$  的模板进行腐蚀

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

消除所有比待检测目标大的其它区域

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第27页

### 13.3.1 击中-击不中变换

#### 击中-击不中变换中结构元素的作用

如上腐蚀后的背景包含所有具有  $M_2$  或更大背景 ( $M_2 \subseteq R$ ) 的像素

③ 将用  $M_1$  腐蚀的目标与用  $M_2$  腐蚀的背景求交集就给出所有包含水平方向上有连续三个像素的线段的中心像素

图 13.3.3(f)  $A \uparrow (M_1, M_2)$

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第28页

### 13.3.2 二值组合运算

#### 1. 区域凸包

令  $B_i, i = 1, 2, 3, 4$ , 代表4个结构元素  
构造 (迭代式) :

$$X_i^k = (X_i^{k-1} \uparrow B_i) \cup A \quad i = 1, 2, 3, 4 \text{ 和 } k = 1, 2, \dots$$

令  $D_i = X_i^{\text{conv}}$   
上标“conv”表示在  $X_i^k = X_i^{k-1}$  意义下收敛

$A$  的凸包可表示为:  $H(A) = \bigcup_{i=1}^4 D_i$

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第29页

### 13.3.2 二值组合运算

#### 2. 细化

用结构元素  $B$  细化集合  $A$  记作  $A \otimes B$   
借助击中-击不中变换定义

$$A \otimes B = A - (A \uparrow B) = A \cap (A \uparrow B)^c$$

定义一个结构元素系列

$$\{B\} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$$

$$A \otimes \{B\} = A - (((A \otimes B_1) \otimes B_2) \dots \otimes B_n)$$

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第30页

### 13.3.2 二值组合运算

#### 3. 粗化

用结构元素 $B$ 粗化集合 $A$ 记作  $A \oplus B$

$$A \oplus B = A \cup (A \uparrow B)$$

定义为一系列操作

$$A \oplus \{B\} = ((\dots((A \oplus B_1) \oplus B_2) \dots) \oplus B_n)$$

粗化从形态学角度来说与细化对应，实际中可先细化背景然后求补以得到粗化的结果。换句话说，如果要粗化集合 $A$ ，可先构造 $C=A^c$ ，然后细化 $C$ ，最后求 $C^c$

**例13.3.6**

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第31页

### 13.3.2 二值组合运算

#### 3. 粗化

粗化与细化是对偶的（变换）

令击中击不中变换中的结构元素 $(E, F) = B$

则对偶关系可表示为

$$(A \otimes B)^c = A^c \oplus \bar{B} \quad \bar{B} = (F, E)$$

$$(A \oplus B)^c = A^c \otimes \bar{B} \quad \bar{B} = (F, E)$$

在 $\bar{B}$ 中，击中和击不中结构元素对调

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第32页

### 13.3.2 二值组合运算

#### 4. 剪切

- 先对 $A$ 细化三次得到(d)  $X_1 = A \otimes \{B\}$
- 构造一个包含 $X_1$ 中所有端点的集合(e)  $X_2 = \bigcup_{k=1}^8 (X_1 \uparrow B_k)$
- 用 $A$ 作为限制将端点膨胀3次(f)  $X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$
- 最后将 $X_1$ 和 $X_3$ 求并集(g)  $X_4 = X_1 \cup X_3$

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第33页

### 13.4 二值形态学实用算法

#### 1. 噪声滤除

先开启后闭合

$$(A \circ B) \bullet B = \{[(A \ominus B) \oplus B] \oplus B\} \ominus B$$

腐蚀 膨胀 膨胀 腐蚀

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第34页

### 13.4 二值形态学实用算法

#### 2. 角点检测

**非对称闭合**：用一个结构元素对图象进行膨胀后再用另一个结构元素对图象进行腐蚀

对 $A$ 的操作  $A^c_{+\diamond} = (A \oplus +) \ominus \diamond$  角点强度  $C_+(A) = |A - A^c_{+\diamond}|$

角点检测  $C_{+\times}(A) = |A^c_{+\diamond} - A^c_{\times\diamond}|$   $C_{\times}(A) = |A - A^c_{\times\diamond}|$  转45°

**图 13.4.2 4个结构元素，依次为+，◇，×，□**

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第35页

### 13.4 二值形态学实用算法

#### 3. 边界提取

先用1个结构元素 $B$ 腐蚀 $A$ ，再求取腐蚀结果与 $A$ 的差集就可得到边界 $\beta(A)$

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$

**图 13.4.3 边界提取示例**

结构元素是8-连通的，而所得到的边界是4-连通的

第13讲

章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN

第36页

13.4 二值形态学实用算法

4. 目标检测和定位

原始图像：包含3×3，5×5，7×7和9×9的四个实心正方形

击中-击不中变换：

3×3实心正方形

大于等于3×3

9×9空心方框

小于等于7×7

(a)

(b)

(c)

(d)

第13讲 章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN 第37页

13.4 二值形态学实用算法

5. 区域填充

条件膨胀

$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \quad k=1, 2, 3, \dots$

找背景

起始点

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)  $X_k = X_{k-1}$

(h)

第13讲 章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN 第38页

13.4 二值形态学实用算法

6. 连通组元提取

考虑集合A中的一个连通组元，已知其中一个点，那么可用下列迭代公式得到其全部元素

$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \quad k=1, 2, 3, \dots$

当  $X_k = X_{k-1}$  时停止迭代， $X_k$  给出连通组元

找前景

(a)

(b)

(c)

(d)

第13讲 章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN 第39页

13.4 二值形态学实用算法

7. 区域骨架计算

A的骨架： $S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A)$

骨架子集： $S_k(A) = (A \ominus kB) - [(A \ominus kB) \circ B]$

$(A \ominus kB)$ 代表连续k次用B对A腐蚀，可用  $T_k$ 表示

$T_k = (A \ominus kB) = ((\dots (A \ominus B) \ominus B) \ominus \dots) \ominus B$

K代表将A腐蚀成空集前的最后一次迭代次数

$K = \max\{k \mid (A \ominus kB) \neq \emptyset\}$

第13讲 章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN 第40页

13.4 二值形态学实用算法

7. 区域骨架计算

A可用  $S_k(A)$  重构： $A = \bigcup_{k=0}^K (S_k(A) \oplus kB)$

$(S_k(A) \oplus kB) = ((\dots (S_k(A) \oplus B) \oplus B) \oplus \dots) \oplus B$

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

(m)

(n)

(o)

(p)

(q)

(r)

(s)

(t)

(u)

(v)

(w)

(x)

(y)

(z)

第13讲 章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN 第41页

联系信息

通信地址：北京清华大学电子工程系

邮政编码：100084

办公地址：清华大学，罗姆楼，6层305室

办公电话：(010) 62798540

传真号码：(010) 62770317

电子邮件：[zhang-yj@tsinghua.edu.cn](mailto:zhang-yj@tsinghua.edu.cn)

个人主页：[oa.ee.tsinghua.edu.cn/~zhangyujin/](http://oa.ee.tsinghua.edu.cn/~zhangyujin/)

第13讲 章毓晋 (TH-EE-IE) ZHANG YU JIN 第42页