

# 基于最大类间后验交叉熵的阈值化分割算法\*

薛景浩 章毓晋 林行刚

(清华大学电子工程系, 北京 100084)

**摘要** 从目标和背景类间差异性出发, 提出了一种基于最大类间交叉熵准则的阈值化分割新算法。该算法假设目标和背景像素的条件分布服从正态分布, 利用贝叶斯公式估计像素属于目标和背景两类区域的后验概率, 再搜索这两类区域后验概率之间的最大交叉熵。比较了新算法与基于最小交叉熵以及基于传统香农熵的阈值化算法的特点和分割性能。

**关键词** 图象分割 阈值化 香农熵 交叉熵 后验概率

## 0 引言

图象分割是指将图象分成具有某种特征差异的不同区域。基于灰度特征分析的阈值化技术是最常用和最基本的分割方法, 有广泛的应用背景和理论价值。近年来为控制分割造成的信息损失, 在图象分割的理论和实践中引入了信息论中的最大香农熵准则<sup>[1~10]</sup>和最小交叉熵准则<sup>[11~13]</sup>。

最大香农熵准则强调系统内部的均匀性, 应用于阈值化分割中就是搜索使目标或背景内部的灰度分布尽可能均匀的最优阈值。交叉熵度量2个概率分布之间信息量差异<sup>[14]</sup>, 是下凸函数。最小交叉熵准则应用在阈值化分割中, 一般是搜索使分割前后图象的信息量差异最小的阈值。现有的最小交叉熵阈值化方法多是对交叉熵形式上的模拟<sup>[11,12]</sup>或只是利用像素与类别的先验概率和条件概率<sup>[13]</sup>估计交叉熵中的2个分布。

基于上述两种准则的算法多是考虑目标或背景类内特性, 事实上也可用目标和背景类间差异最大来作为分割准则。本文定义类间差异为: 图象中所有像素点分别判决到目标和背景的两个后验概率之间的平均差异。最优阈值应使这个差异最大。本文

采用交叉熵度量这种差异, 提出了基于最大类间对称交叉熵的阈值化新算法, 并给出了分割实验的结果。

## 1 原理说明

### 1.1 现有的最小交叉熵阈值化方法

设有2个概率分布  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  和  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ , 交叉熵度量它们之间的信息量差异<sup>[14]</sup>, 其对称形式为:

$$D(P:Q) = \sum_{i=1}^N p_i \ln \frac{p_i}{q_i} + \sum_{i=1}^N q_i \ln \frac{q_i}{p_i} \quad (1)$$

交叉熵既可看成是采用  $P$  取代  $Q$  作为单个系统概率分布时系统信息量变化的期望值; 也可看成是2个概率系统  $P$  和  $Q$  之间的信息量差异。因而可用最小交叉熵准则实现系统的概率分布估计或逼近。

现有的最小交叉熵分割方法均是用  $P$  和  $Q$  分别表征分割前后的原始图和分割图, 然后计算目标之间的交叉熵、背景之间的交叉熵, 并取其和定义为原始图和分割图之间的交叉熵。文献[11]定义的交叉熵为:

\* 本研究得到国家自然科学基金(No. 69672029)资助。

收稿日期: 1998-01-23; 收到修改稿日期: 1998-05-25

$$D(P, Q; t) = \sum_{g=0}^L gh(g) \ln \frac{g}{\mu_1(t)} + \sum_{g=t+1}^L gh(g) \ln \frac{g}{\mu_2(t)} \quad (2)$$

式中  $g$  是灰度值,  $L$  是灰度上界,  $t$  是阈值化时的阈值;  $\mu_1(t)$ 、 $\mu_2(t)$  是类内均值, 分别代表分割后得到的分割图中目标和背景的灰度, 可通过原始图的直方图  $h(g)$  估计出。设原始图中目标类的先验概率为  $P_1 = \sum_{g=0}^t h(g)$ ; 背景类的先验概率为  $P_2 = \sum_{g=t+1}^L h(g)$ , 则

$$\mu_1(t) = \frac{1}{P_1} \sum_{g=0}^t gh(g) \quad (3)$$

$$\mu_2(t) = \frac{1}{P_2} \sum_{g=t+1}^L gh(g) \quad (4)$$

文献<sup>[12]</sup>定义的交叉熵有两个, 其一为标准交叉熵:

$$D(P, Q; t) = \sum_{g=0}^t \mu_1(t) h(g) \ln \frac{\mu_1(t)}{g} + \sum_{g=t+1}^L \mu_2(t) h(g) \ln \frac{\mu_2(t)}{g} \quad (5)$$

其二为对称交叉熵:

$$D(P:Q; t) = \sum_{g=0}^t \left[ gh(g) \ln \frac{g}{\mu_1(t)} + \mu_1(t) h(g) \ln \frac{\mu_1(t)}{g} \right] + \sum_{g=t+1}^L \left[ gh(g) \ln \frac{g}{\mu_2(t)} + \mu_2(t) h(g) \ln \frac{\mu_2(t)}{g} \right] \quad (6)$$

不难看出文献[11]和[12]都是在保持分割图(二值图)灰度总量与原始图相等的条件下, 直接用灰度值取代概率分布作为  $P$  和  $Q$ , 计算图象之间灰度的散度, 然后搜索使该散度最小的阈值。式(4)和式(5)只是式(6)中不同部分的组合。它们只是形式上套用了交叉熵, 而不是概率分布的差异。而且灰度总量保持并非是图象分割所必需的<sup>[13]</sup>。文献[13]用直方图估计  $P$  中的先验概率, 并归一化后定义为条件概率; 用泊松分布估计  $Q$  中两类像素的条件概率, 并用先验概率  $Q_1$ 、 $Q_2$  进行归一化。该文献定义的交叉熵为:

$$D(P:Q; t) = \sum_{g=0}^t \left[ \frac{h(g)}{P_1} \ln \frac{h(g)/P_1}{q(g)/Q_1} + \frac{q(g)}{Q_1} \ln \frac{q(g)/Q_1}{h(g)/P_1} \right] + \sum_{g=t+1}^L \left[ \frac{h(g)}{P_2} \ln \frac{h(g)/P_2}{q(g)/Q_2} + \frac{q(g)}{Q_2} \ln \frac{q(g)/Q_2}{h(g)/P_2} \right] \quad (7)$$

式中  $Q_1 = \sum_{g=0}^t q(g)$ ;  $Q_2 = \sum_{g=t+1}^L q(g)$ 。这里存在

3 个问题: 首先认为目标和背景均属于泊松分布这一假设的普遍性不强; 其次是泊松分布只有一个参数, 或者说均值和方差相等。如果当目标或背景均值处在高亮区时, 方差就会很大, 这显然是对图象本身特性的不合理的要求和限制; 最后式(7)只是利用了先验概率和条件概率, 而没有考虑划分象素点所依据的后验概率。

### 1.2 最大类间交叉熵阈值化分割

需要说明的是: 用概率分布  $P$  和  $Q$  分别表征分割前后的图象时,  $P$ 、 $Q$  都是包含目标和背景两类分布的混合分布, 因而  $P$ 、 $Q$  中均可定义象素的先验概率、类的先验概率、已知类别下象素对于该类的条件概率、出现象素后将其归于某类的后验概率。

最大香农熵算法多是考虑目标和背景类内的均匀性, 最小交叉熵算法多是考虑原始图与分割图的相似性。而本文从目标和背景类间差异性出发, 搜索使分割后的类间差异最大的阈值。让  $P$  和  $Q$  分别表征原始图中目标和背景区域的分布, 就可以用交叉熵度量这一差异。这里  $P$  和  $Q$  不是两类区域的混合分布, 因此不同于前述算法。本文定义  $p(s)$  为原始图中象素  $s$  的先验概率,  $P_i$  为第  $i$  类的先验概率,  $p(s/i)$  为第  $i$  类中出现象素  $s$  的条件概率,  $p(i/s)$  为象素  $s$  归入第  $i$  类的后验概率,  $i = 1, 2$ 。

设图象象素集合为  $S$ 。从贝叶斯判决理论来看, 最优阈值应该使各象素点判决到不同类的后验概率尽可能差别大。因而本文定义类间差异为:  $S$  中所有象素点分别判决到目标和背景的两个后验概率之间的平均差异。最优阈值应使这个差异最大。本文采用交叉熵度量这种差异, 提出了基于最大类间对称交叉熵的图象分割新算法。首先定义象素点  $s(s \in S)$  基于后验概率  $p(1/s)$ 、 $p(2/s)$  的对称交叉熵为

$$D(1:2; s) = p(1/s) \ln \frac{p(1/s)}{p(2/s)} + p(2/s) \ln \frac{p(2/s)}{p(1/s)} \quad (8)$$

考虑到后验概率可能趋于零, 会使上式中的对数项奇异化, 在保证非负性的前提下将式(8)做如下修正:

$$D(1:2; s) = \frac{1}{3} [1 + p(1/s)] \ln \frac{1 + p(1/s)}{1 + p(2/s)} + \frac{1}{3} [1 + p(2/s)] \ln \frac{1 + p(2/s)}{1 + p(1/s)} \quad (9)$$

然后分别对目标和背景内的象素的交叉熵求取平均值, 将两者之和作为总的类间差异, 得到

$$D(1:2) = \sum_{s=1}^L \frac{p(s)}{P_1} D(1:2;s) + \sum_{s=2}^L \frac{p(s)}{P_2} D(1:2;s) \quad (10)$$

本文中用灰度值  $g$  表征像素点  $s$ , 同时假设目标和背景灰度的条件分布服从正态分布

$$p(g/i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2(t)}} \exp\left\{-\frac{(g - \mu_i(t))^2}{2\sigma_i^2(t)}\right\} \quad (11)$$

其参数可由直方图中估计出, 其中类内均值估计同式(3)和(4), 类内方差可估计如下:

$$\sigma_1^2(t) = \frac{1}{P_1} \sum_{g=0}^L h(g)(g - \mu_1(t))^2 \quad (12)$$

$$\sigma_2^2(t) = \frac{1}{P_2} \sum_{g=t+1}^L h(g)(g - \mu_2(t))^2 \quad (13)$$

用贝叶斯公式求取后验概率如下:

$$p(i/g) = P_i p(g/i) / \sum_{i=1}^2 P_i p(g/i) \quad (14)$$

结合灰度直方图重写式(11), 得到

$$D(1:2;t) = \sum_{g=0}^t \frac{h(g)}{P_1} D(1:2;g) + \sum_{g=t+1}^L \frac{h(g)}{P_2} D(1:2;g) \quad (15)$$

搜索使上式最大的  $t$  作为最优分割阈值。

## 2 实验分析

测试图象包括图 1(a) 的标准图象 Lenna, 图 2(a) 的工件检测图象。选取的比较算法有基于香农熵的最大后验算法 Pun1<sup>[3]</sup> 及均匀测度和形状测度最优约束的算法 Wong<sup>[5]</sup>、各向异性系数法 Pun2<sup>[6]</sup>、最大熵法 Kapur<sup>[7]</sup>、二阶最大熵法 A buta<sup>[8]</sup> 及 Brink<sup>[9]</sup>、最小互相关算法 Johan<sup>[10]</sup>; 以及基于最小交叉熵的 Li 算法<sup>[11]</sup>、BrPen 算法<sup>[12]</sup> 和 Pal 算法<sup>[13]</sup>。在表 1 中同时单列均匀测度最大的阈值 Unifo<sup>[2]</sup> 和形状测度最优的阈值 Shape<sup>[2]</sup>, 对 A buta 和 Brink 的算法也同时列出灰度轴上的阈值  $G$  及平均灰度轴上的阈值  $M$ 。

图 1 和图 2 给出各算法分割的结果图。鉴于 A butaG 和 BrinkG 的效果较差及篇幅所限, 图中未给出它们及 BrinkM (与 A butaM 接近)、Pun2 (与 Pun1 接近) 算法的分割结果图。

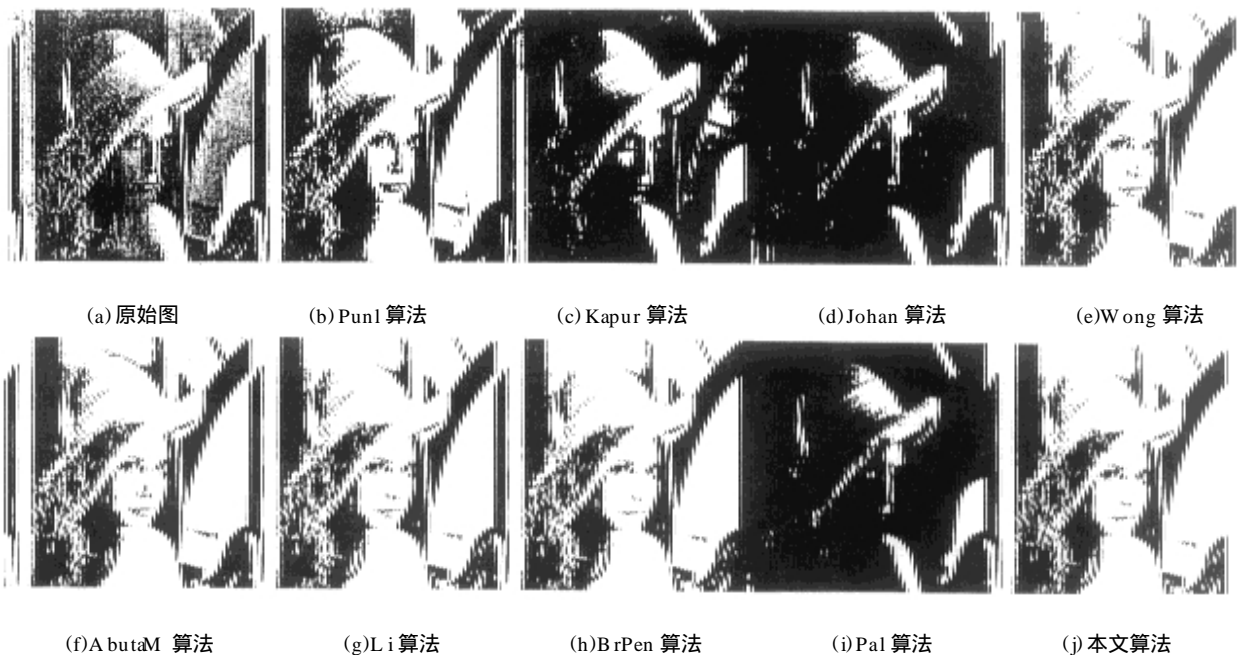


图 1 Lenna 图象的二值化结果图

表 1 各算法的最优阈值

	Unifo	Shape	Pun1	Pun2	Kapur	Johan	Wong	A butaG	A butaM	BrinkG	BrinkM	Li	Brpen	Pal	本文算法
图 1	84	81	98	98	139	164	84	177	88	117	89	82	80	174	81
图 2	73	56	130	138	118	70	73	120	133	156	129	79	81	32	62

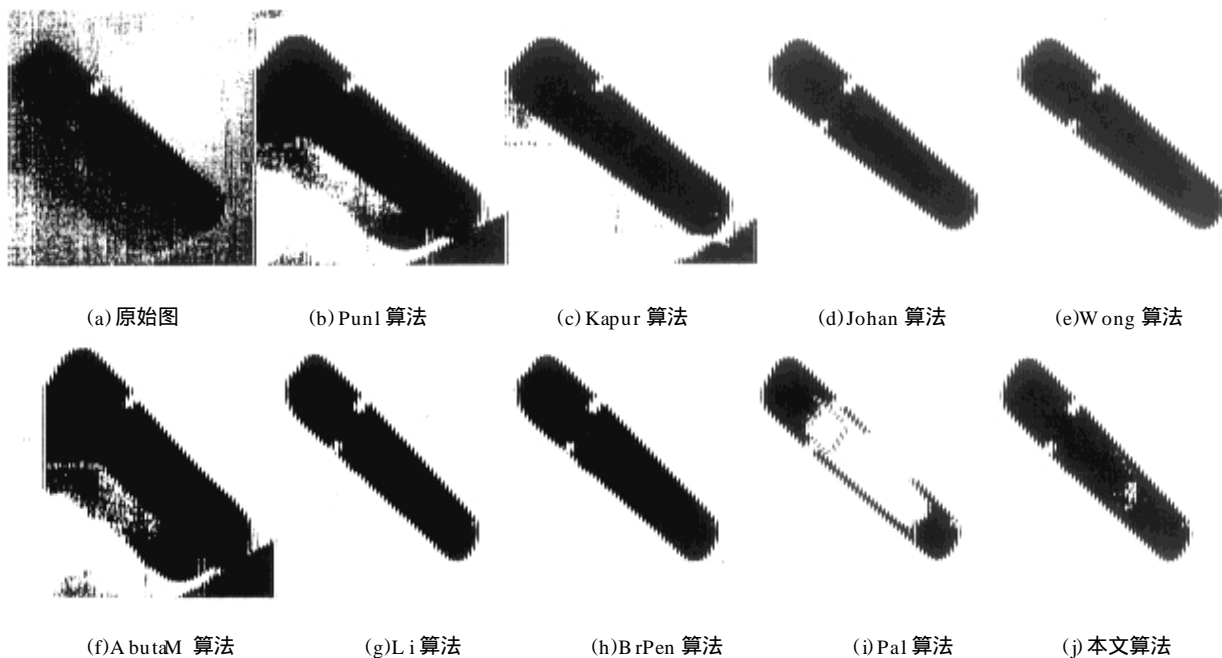


图 2 工件图象二值化结果图

从图表中可看出: (1) 对 Lenna 图象: 本文算法的形状测度最好, 均匀测度也接近最优, 分割结果与 A butaM、Wong 及 Li BrPen 算法相近, 要优于其它算法; 而同样基于交叉熵的 Pal 算法视觉效果最差, 说明泊松分布此时不成立。(2) 对工件图象: 本文算法的形状测度最接近最优, 但从区域的完整性来说不如 Johan、Wong、Li 和 BrPen 算法; 由于原始图中存在严重的阴影和反光, 目标和背景的方差均较大, 对比度也不高, 导致强调类内均匀性的最大香农熵算法将阴影当作目标工件误提取出来, 视觉效果也偏暗; Li 和 BrPen 算法提取的目标下侧凹槽略有粘连, 而 Pal 算法提取的工件因反光而极不完整。

总的来看, 本文算法的分割性能接近于形式模拟交叉熵的 Li BrPen 算法和 Wong 等提出的均匀测度和形状测度最优的最大后验熵算法, 而要优于同样基于概率计算和交叉熵的 Pal 算法和其它算法。需要指出 Wong 算法需计算各待选阈值下的均匀测度和形状测度, 尤其是形状测度, 计算复杂度远大于其它算法。

### 3 总 结

本文的最大类间交叉熵分割准则是: 最优阈值应该使各象素点分别判决到不同类的后验概率尽可能的差别大。为此假设目标和背景象素灰度的条件分布服从正态分布, 由直方图中估计分布参数, 利用

贝叶斯公式计算后验概率。从实验结果看, 本文算法有较好的通用性和有效性。算法也容易实现二维推广, 即采用二维统计量(如散射图或共生矩阵)取代直方图, 以提高分割的准确性。

### 参 考 文 献

- 1 Pal N R, Pal S K. A review on image segmentation techniques, Pattern Recognition, 1993, 26(9), 1277~ 1294
- 2 Sahoo P K et al. A survey of thresholding techniques, CVGIP, 1988, 41, 233~ 260
- 3 Pun T. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram, Signal Process, 1980, 2, 223~ 237.
- 4 Pal N R, Pal S K. Entropic thresholding, Signal Process, 1989, 16, 97~ 108
- 5 Wong A K C, Sahoo P K. A gray-level threshold selection method based on maximum entropy principle, IEEE Trans SMC, 1989, 19, 422~ 429
- 6 Pun T. Entropy thresholding: A new approach, CGIP, 1981, 16, 210~ 239
- 7 Kapur J N et al. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram, CVGIP, 1985, 29, 273~ 285.
- 8 Abutaleb A S. Automatic thresholding of gray-level pictures using two-dimensional entropy, CVGIP, 1989, 47, 23~ 32
- 9 Brink A D. Thresholding of digital images using of two-dimensional entropies, Pattern Recognition, 1992, 25, 803~ 808
- 10 Johannsen G, Bille J. A threshold selection method using information measures, in: Proceedings, 6th Int Conf. Pattern Recognition Munich, Germany, 1982, 140~ 143

- 11 Li C H, Lee C K. Minimum cross entropy thresholding. Pattern Recognition, 1993, 26(4): 617~ 625
- 12 Brink A D, Pendock N E. Minimum cross- entropy threshold selection. Pattern Recognition, 1996, 29(1): 179~ 188
- 13 Pal N R. On minimum cross- entropy thresholding. Pattern Recognition, 1996, 29(4): 575~ 580
- 14 Kullback S. Information Theory and Statistics. New York: John Wiley, 1959.



章毓晋 教授, 博士生导师, 中国图象图形学会副秘书长, 学术委员会副主任, 《中国图象图形学报》副主编。主要研究领域是图象工程(图象处理、图象分析、图象理解及其应用)和相关学科, 已发表论文 80 余篇。



薛景浩 1993 年和 1998 年分别于清华大学电子工程系获学士和博士学位, 现为法国 CAEN 大学博士后。主要研究兴趣是图象工程(图象处理、分析和理解及其应用)、模式识别和机器智能。



林行刚 教授, 博士生导师, 1970 年毕业于清华大学无线电电子学系, 1986 年获日本京都大学工学博士, IEEE 高级会员。主要研究领域为数字图象处理、图象分析与识别。已发表论文 60 余篇。

## Image Thresholding Based on Maximum Between-Class Posterior Cross Entropy

Xue Jinghao, Zhang Yujin, Lin Xinggang

(Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084)

**Abstract** Although several image thresholding algorithms based on minimum cross entropy criterion have been proposed in recent years, only the form of the criterion or a priori probability and conditional probability was employed. In this paper, a new algorithm based on maximum between-class cross entropy using a posterior probability is presented for image thresholding taken into account the dissimilarity between object and background in image. Suppose the conditional distributions of object and background are modeled with normal distributions, the a posterior probabilities are computed by Bayes formula. The new algorithm is compared with a number of traditional algorithms based on Shannon entropy and minimum cross entropy by applying them to various test images.

**Keywords** Image segmentation, Thresholding, Shannon Entropy, Cross entropy, A posterior probability

(上接第 109 页)

Intel 和 PictureTel 就未来电视会议和协同工作产品的共同开发达成协议。这些新的产品将可以工作于多种网络, 包括 IP、ISDN 和 ATM。它们将以 PictureTel 的品牌进入市场, 并进一步完善 PictureTel 现有的产品系列。

“我们希望通过 PictureTel 的全球分销和服务网络, 实现全球 PC 电视会议产品应用的显著增长。”Intel 执行副总裁 New Business Group 总经理 Gorhard H. Parker 说。“全球视频协作的领导厂商选择 PC 结构作为会议电视方案的核心组成, 我们感到非常高兴。”

这一联盟将产生世界上最综合、最全面的视频协作方案, 并实现更广泛的分销, 使客户可以更方便地实施和使用。

“Intel 在 PC 技术上的世界领先地位和 PictureTel 在视频协作应用领域的全球领导地位相结合, 将把会议电视推向一个新的里程碑。”PictureTel 主席、总裁兼首席执行官 Bruce R. Bond 先生说。“通过共同开发新的产品, 我们提供的方案, 使客户能够在全球利用视频协作进行重要商业活动, 使商业运作更加高效。”

PictureTel 国际公司是世界上最主要的开发、制造和销售全系列视频和音频协作方案的企业。该公司全面满足客户对电视会议应用的需求, 从桌面系统到集团系统, 以及网络会议服务器和综合企业服务, 为远程教育、远程医疗、金融服务以及制造业提供全面电视会议方案。