

图象工程（上）

# 图 象 处 理

（第3版）

章毓晋

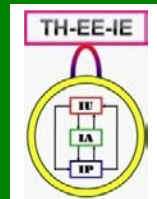
清华大学电子工程系 100084 北京



## 第2单元 图象恢复

- 第5章 图象消噪和恢复
- 第6章 图象校正和修补
- 第7章 图象投影重建

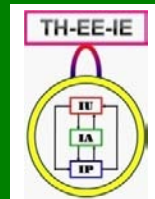
图象恢复认为图象（质量）在某种情况/条件下退化或恶化了，现在需要根据相应的退化模型和知识重建或恢复原始的图象。图象恢复技术要将图象退化的过程模型化，并根据确定的图象退化模型对原始图象进行复原，以获得原来期望的效果。



# 第7章 图象投影重建

## 图象投影重建的历史

- ◆ 1971年：第1台CT机器建成
- ◆ 1972年：公布这台机器（1973年正式使用）
- ◆ 1979年：两个发明人豪斯费尔德（G.H. Hounsfield）和柯马克（A.M. Cormack）获得了诺贝尔生理和医学奖
- ◆ 获得CT图象也被认为是第一次通过解决一个属于逆问题和病态问题（inverse and ill-posed problems）的数学问题来获得图象的成功实例



# 第7章 图象投影重建

## 图象投影重建

- ◆ 根据一个物体的投影图重建目标图象的过程
- ◆ 输入投影图  $\Rightarrow$  (图象处理)  $\Rightarrow$  输出重建图
- ◆ 一类特殊的图象恢复技术

投影：退化过程

(丢失了沿射线方向的分辨能力)

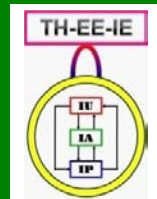
重建：复原过程

(恢复了2-D空间的分辨能力)



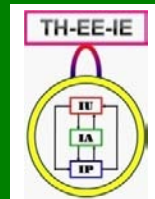
# 第7章 图象投影重建

- 7.1 投影重建方式
- 7.2 投影重建原理
- 7.3 傅里叶反变换重建
- 7.4 逆投影重建
- 7.5 代数重建技术
- 7.6 综合重建方法



# 7.1 投影重建方式

- 7.1.1 透射断层成象
- 7.1.2 发射断层成象
- 7.1.3 反射断层成象
- 7.1.4 电阻抗断层成象
- 7.1.5 磁共振成象



## 7.1.1 透射断层成象

### TCT (Transmission Computed Tomography)

希腊语中的tomos是薄片 (slice) 的意思

CAT (Computer-Aided Tomography, CT)

发射源射出的射线穿透物体到达接收器

接收器获得的射线强度实际上反映了物体各部分对射线的吸收情况

$$I = I_0 \exp \left\{ - \int_L k(s) ds \right\}$$

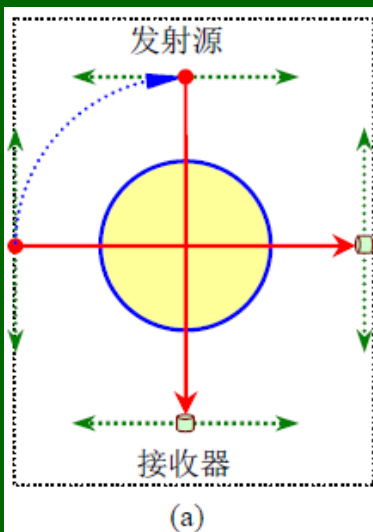
$$I = I_0 \exp \{ -kL \}$$

# 7.1.1 透射断层成象

## CT结构的换代

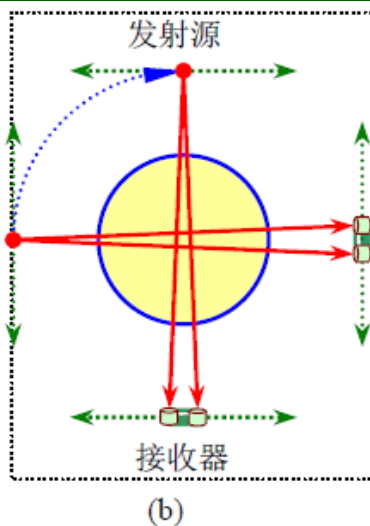
第1代

1对1



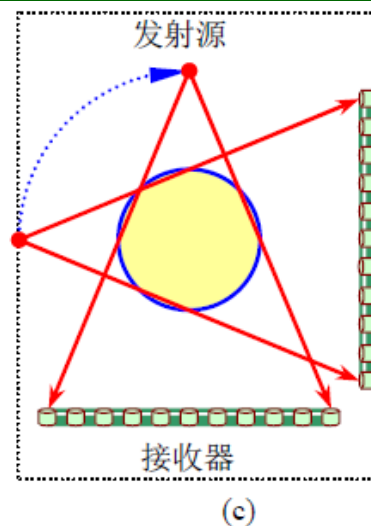
第2代

1对多



第3代

同时转动



第4代

仅源转动

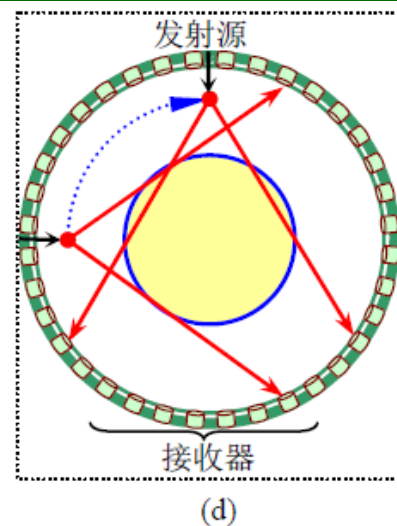
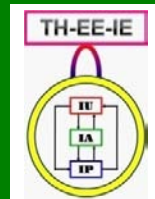


图 7.1.1 四代 CT 系统结构示意图





## 7.1.2 发射断层成象

### ECT (emission computed tomography)

发射源在物体内部，接收器在物体外部  
检测到与生理有关的状况/信息

主要有两种：

#### ① PET (positron emission tomography)

正电子与负电子相撞湮灭而产生一对光子

#### ② SPECT (single photon emission CT)

使用在衰减中能产生 $\gamma$ 射线的放射性离子

## 7.1.2 发射断层成象

### ① PET (positron emission tomography)

相对放置的两个接收器可以确定一条射线

$$P = \exp(-\int k(s)ds) \int f(s)ds$$

$k(s)$ : 衰减系数

$f(s)$ : 同位素的  
分布函数

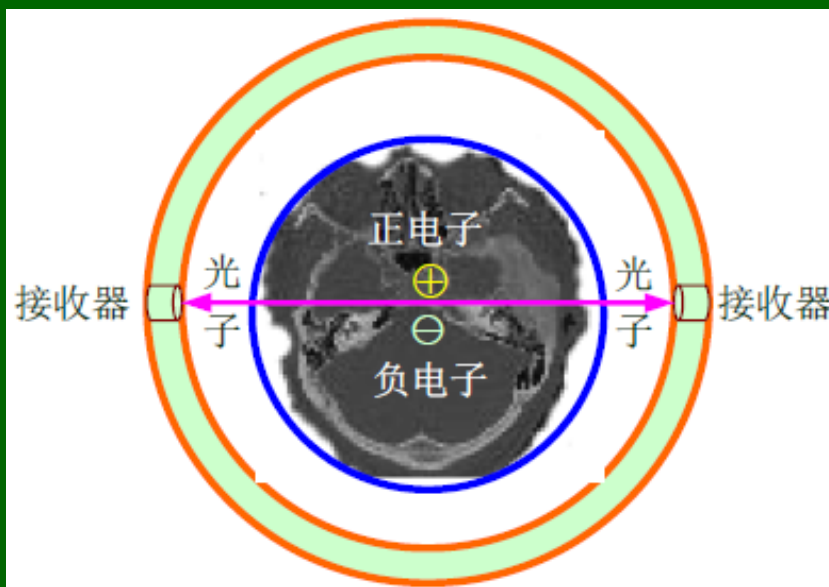


图 7.1.2 PET 成像系统构成示意图

## 7.1.2 发射断层成象

### ② SPECT (single photon emission CT)

将放射性物质注入物体内，不同的材料（如组织或器官）吸收后会发射 $\gamma$ 射线

$\gamma$ 射线穿过准直器到达晶体，在那里 $\gamma$ 射线光子转化为电信号

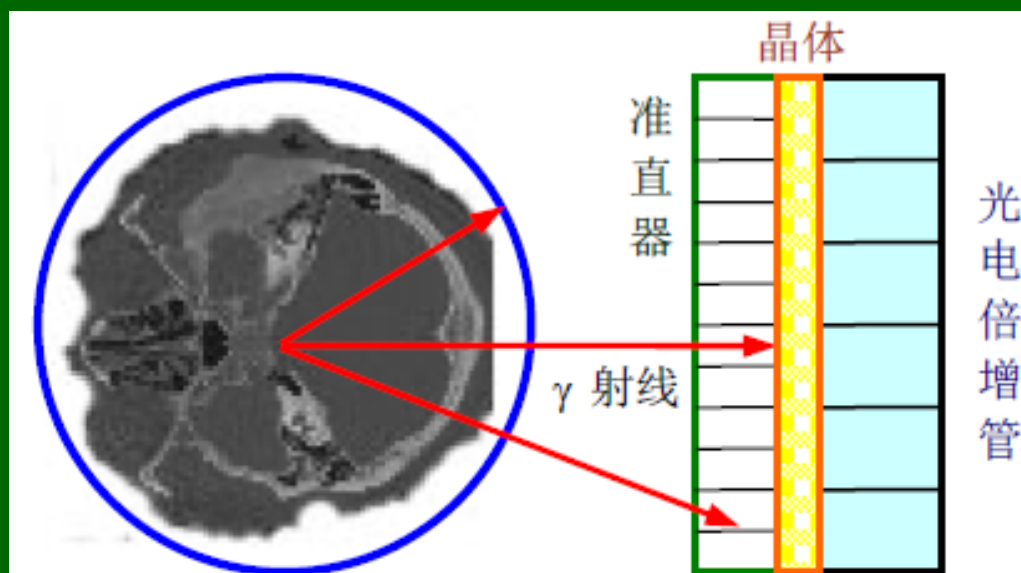
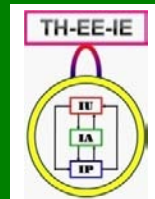


图 7.1.3 SPECT 成像系统构成示意图



## 7.1.3 反射断层成象

### RCT (reflection CT)

雷达系统获取的雷达图是由物体反射的回波所产生的

雷达接收器在特定角度所接收到的回波强度是地面反射量在一个扫描段的积分  
(对比CT)

**投影重建**就是要从这个积分获得地面  
(反射强度) 的图象

## 7.1.3 反射断层成象

### 非聚焦合成孔径雷达

雷达运动，目标静止，相对运动增加分辨率

$$\theta_A(t) = -\frac{4\pi y^2}{2R\lambda} = -\frac{4}{\lambda} \frac{v^2 t^2}{2R}$$

$$\theta_B(t, d) = -\frac{4\pi (vt - d)^2}{\lambda 2R}$$

$$E(d) = \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left[-\frac{j4\pi}{2R\lambda} (vt - d)^2\right] dt$$

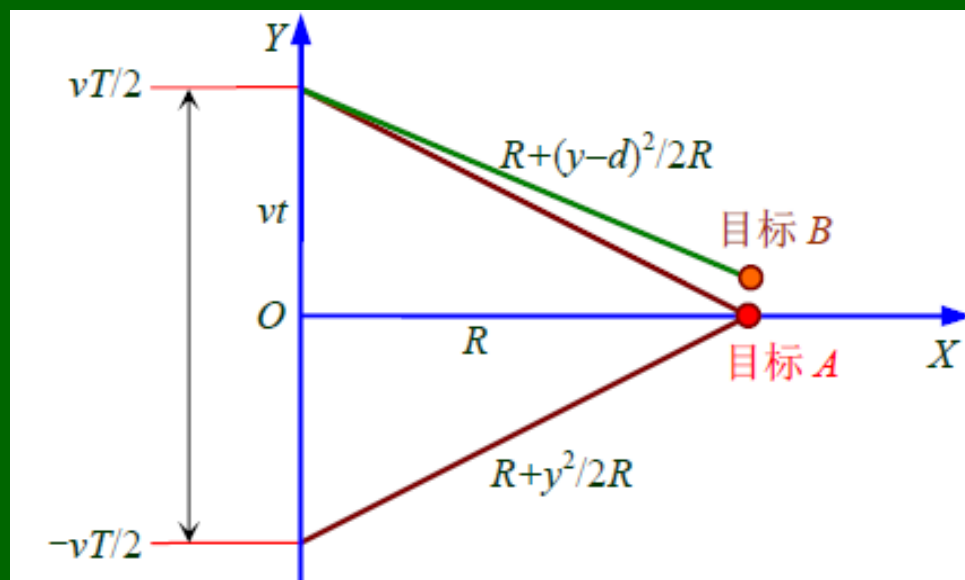
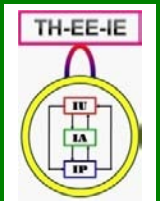


图 7.1.4 非聚焦合成孔径雷达成像的示意图



## 7.1.4 电阻抗断层成象

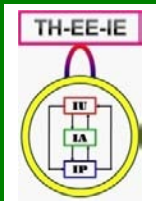
### EIT (electrical impedance tomography)

采用交流电场对物体进行激励检测

将低频率的电流注入物体内部并测量在物体外表处的电势场

用图象重建算法就可以重建出物体内部区域的电导和电抗的分布或变化的图象

EIT图象能反映组织或器官携带的病理和生理信息 (图7.1.5)



## 7.1.5 磁共振成像

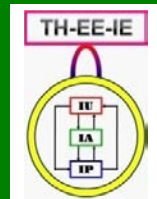
**MRI (magnetic resonance imaging)** , **NMR**

质子在磁场中会进动

当一定强度和频率的共振场信号作用于物体时，质子吸收能量并转向与磁场相交的朝向

质子吸收的能量释放并被接收器检测到。根据检测到的信号就可以确定质子的密度

检测到的信号是MRI信号沿直线的积分。所以检测目标的工作成了由投影重建的问题



## 7.2 投影重建原理

{各种成象方式在原理不完全相同但有一些共性}

7.2.1 基本模型

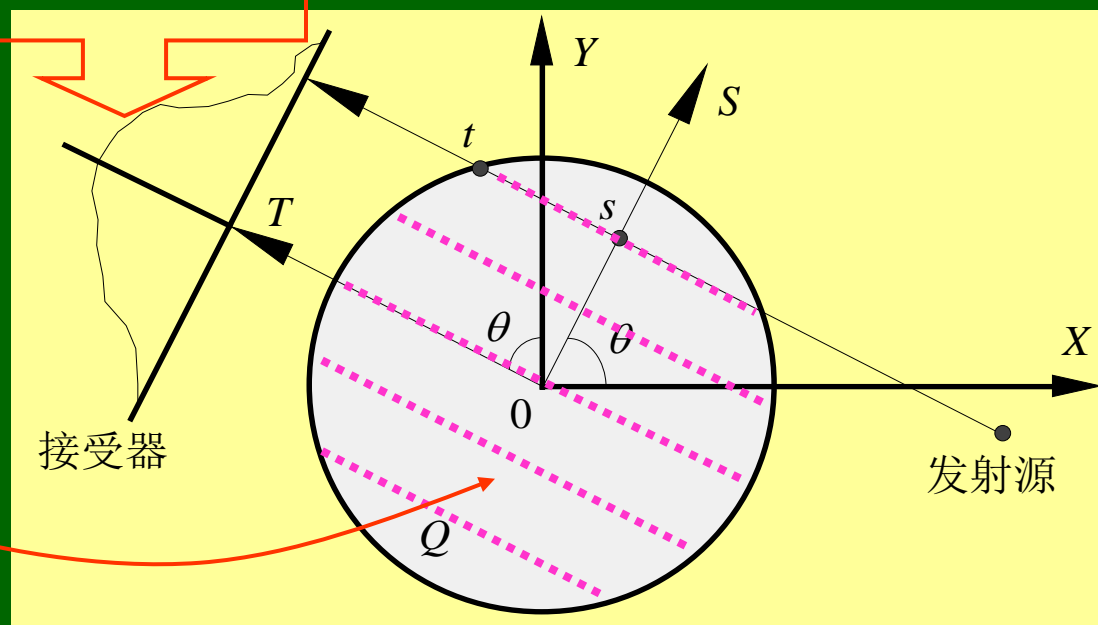
7.2.2 拉东变换

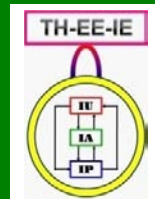


## 7.2.1 基本模型

### 基本模型

如果测量到的数据具有物体某种感兴趣的物理特性在空间分布的积分的形式，那么就可以/需要用投影重建的方法来获得物体内部的图象（代表某种物理量在2-D平面上的分布）





## 7.2.1 基本模型

### 投影重建原理

由发射源到接收器的直线

$$g(s, \theta) = \int_{(s, \theta)} f(x, y) dt = \int_{(s, \theta)} f(s \times \cos \theta - t \times \sin \theta, s \times \sin \theta + t \times \cos \theta) dt$$

上述积分就是 $f(x, y)$ 沿 $t$ 方向的投影

设 $Q$ 是单位圆，积分上下限分别为 $t$ 和 $-t$

直线 $(s, \theta)$ 落在 $Q$ 内部分  $t(s) = \sqrt{1-s^2} \quad |s| \leq 1$

直线 $(s, \theta)$ 落在 $Q$ 外部分  $g(s, \theta) = 0 \quad |s| > 1$

## 7.2.2 拉东变换

### 线积分

$$R_f(p, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dl$$

直线  $l$  的方程

$$p = x \cos \theta + y \sin \theta$$

借助  $\delta$  函数

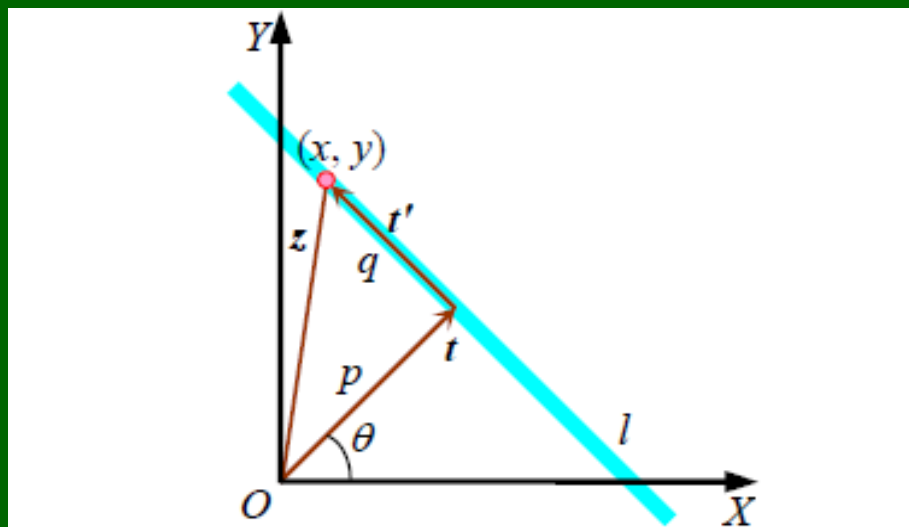
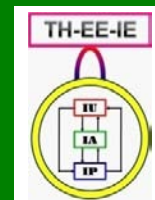


图 7.2.2 用于定义拉东变换的坐标系

$$R_f(p, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dl = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy$$



## 7.2.2 拉东变换

### 中心层定理

可以证明，对 $f(x, y)$ 的2-D傅里叶变换与对 $f(x, y)$ 先进行拉东变换后再进行1-D傅里叶变换得到的结果相等

$$\mathcal{F}_{(1)}\{\mathcal{R}[f(x, y)]\} = \mathcal{F}_{(1)}\{R_f(p, \theta)\} = \mathcal{F}_{(2)}[f(x, y)] = F(u, v)$$

拉东变换

1-D傅里叶变换

2-D傅里叶变换

## 7.2.2 拉东变换

### 中心层定理

对 $f(x, y)$ 沿一个固定角度（图中 $\theta$ ）投影结果的1-D傅里叶变换对应 $f(x, y)$ 的2-D傅里叶变换中沿相同角度的一个剖面/层

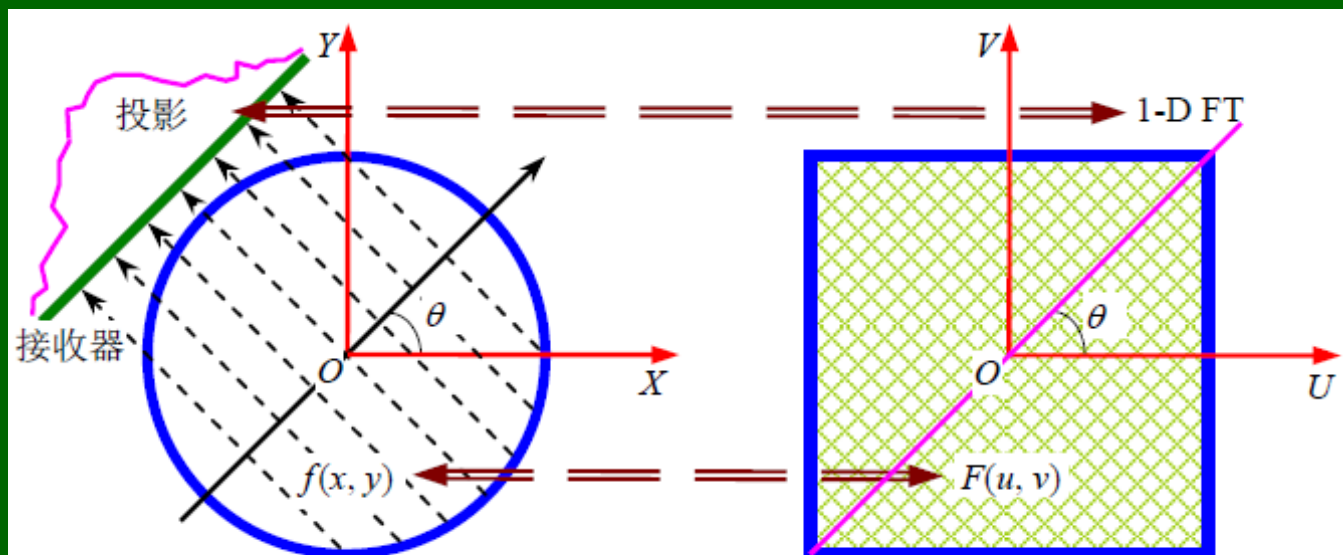
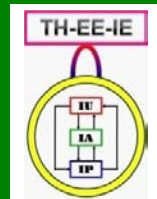


图 7.2.3 中心层定理示意图

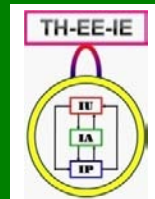


## 7.3 傅里叶反变换重建

### 1. 基本步骤和定义

- (1) 建立数学模型，其中已知量和未知量都是连续实数的函数
- (2) 利用反变换公式（可有多多个等价的）解未知量
- (3) 调节反变换公式以适应离散、有噪声应用的需求

**重建算法：** 设图象区被1个直角网格所覆盖， $K$ 为 $X$ 方向上的点数， $L$ 为 $Y$ 方向上的点数，要通过 $M \times N$ 个测量值 $g(m\Delta s, n\Delta\theta)$ 估计出在 $K \times L$ 个采样点的 $f(k\Delta x, l\Delta y)$



## 7.3 傅里叶反变换重建

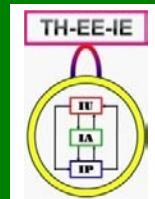
### 1. 基本步骤和定义

考虑在 $s$ 和 $\theta$ 上都均匀采样的情况

$M$ 个间距为 $\Delta s$ 的射线,  $N$ 个相差 $\Delta\theta$ 的角度

$$\left. \begin{aligned} M^+ &= (M-1)/2 \\ M^- &= -(M-1)/2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{ll} M \text{ 为奇数} & \text{类似定义} \\ & K^+ \text{ 和 } K^- \end{array}$$
$$\left. \begin{aligned} M^+ &= (M/2)-1 \\ M^- &= -M/2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} M \text{ 为偶数} \end{array}$$

一系列射线  $\{(m\Delta s, n\Delta\theta): M^- \leq m \leq M^+, 1 \leq n \leq N\}$   
覆盖圆, 选取  $\Delta\theta = \pi/N$  和  $\Delta s = 1/M^+$



## 7.3 傅里叶反变换重建

### 2. 傅里叶变换投影定理

$$G(R, \theta) = \int_{(s, \theta)} g(s, \theta) \exp[-j2\pi R s] ds$$

$$F(X, Y) = \iint_Q f(x, y) \exp[-j2\pi(xX + yY)] dx dy$$

投影定理:  $G(R, \theta) = F(R \cos \theta, R \sin \theta)$

- $f(x, y)$ 以 $\theta$ 角进行投影的傅里叶变换等于 $f(x, y)$ 的傅里叶变换在傅里叶空间 $(R, \theta)$ 处的值
- $f(x, y)$ 在与 $X$ 轴成 $\theta$ 角的直线上投影的傅里叶变换是 $f(x, y)$ 的傅里叶变换在朝向角 $\theta$ 上的1个截面



## 7.3 傅里叶反变换重建

### 2. 傅里叶变换投影定理

$$G(R, \theta) = F(R \cos \theta, R \sin \theta)$$

对投影（Radon变换）的1-D傅里叶变换可得到定义在傅里叶空间的极坐标网格。需要进行插值以获得直角坐标系统中的 $F(u, v)$ 再进行2-D傅里叶反变换

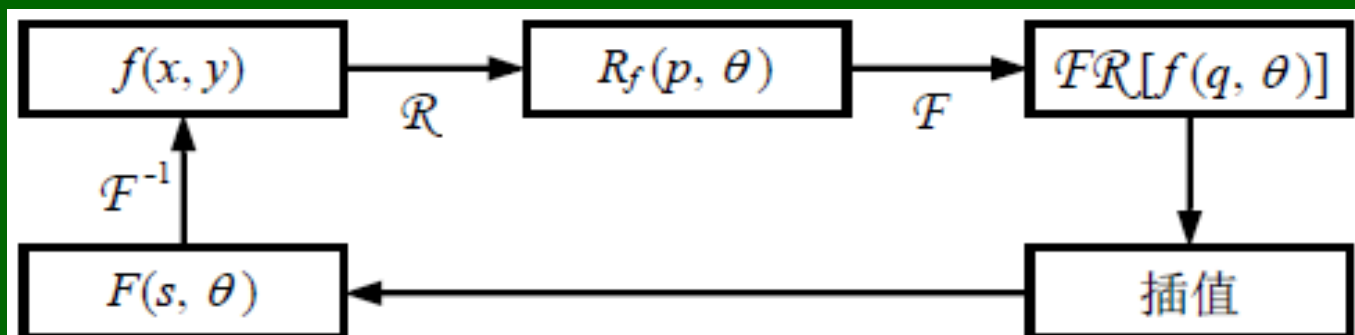


图 7.3.1 直接傅里叶反变换重建流程图

## 7.3 傅里叶反变换重建

### 3. 模型重建

人为设计的模型（phantom，幻影）

10个圆/椭圆

不同：中心坐标

长短轴长

旋转倾角

密度/灰度

{表7.3.1}

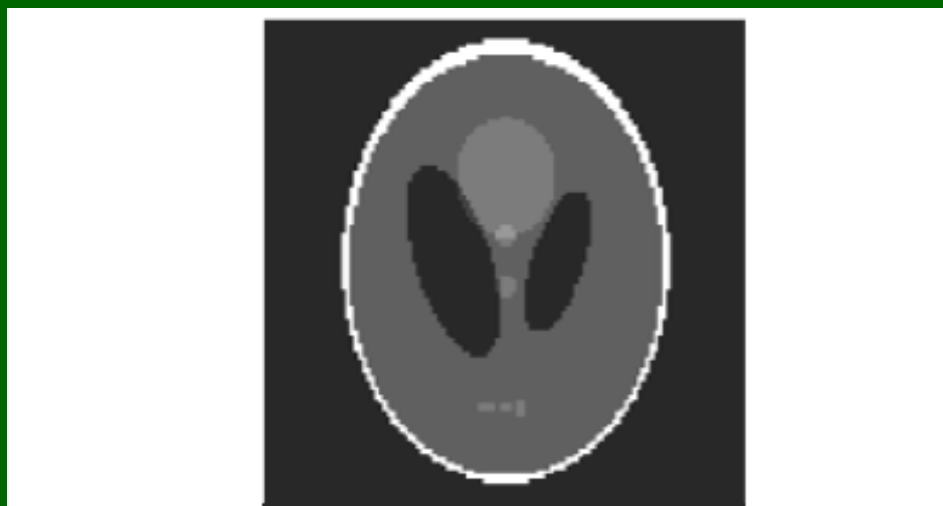
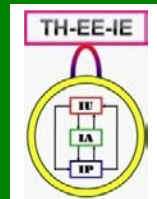


图 7.3.2 改进的 Shepp-Logan 头部模型图



## 7.4 逆投影重建

{目前使用较多的一类方法}

7.4.1 逆投影重建原理

7.4.2 卷积逆投影重建

7.4.3 其他逆投影重建方法

## 7.4.1 逆投影重建原理

### 逆投影

采集时得到的是空间特性/属性的投影

将从各个方向得到的投影逆向投影回到该方向的各个位置

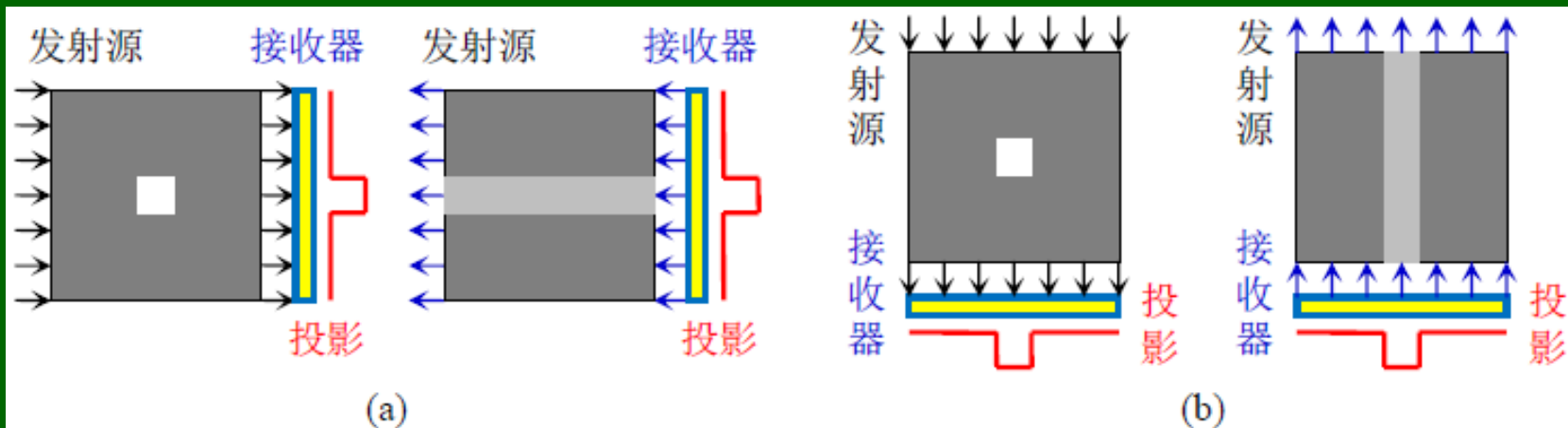


图 7.4.1 投影和逆投影

## 7.4.1 逆投影重建原理

### 逆投影

利用逆投影可以重建原始空间密度分布  
不同方向逆投影结果叠加

逆投影重建的效果

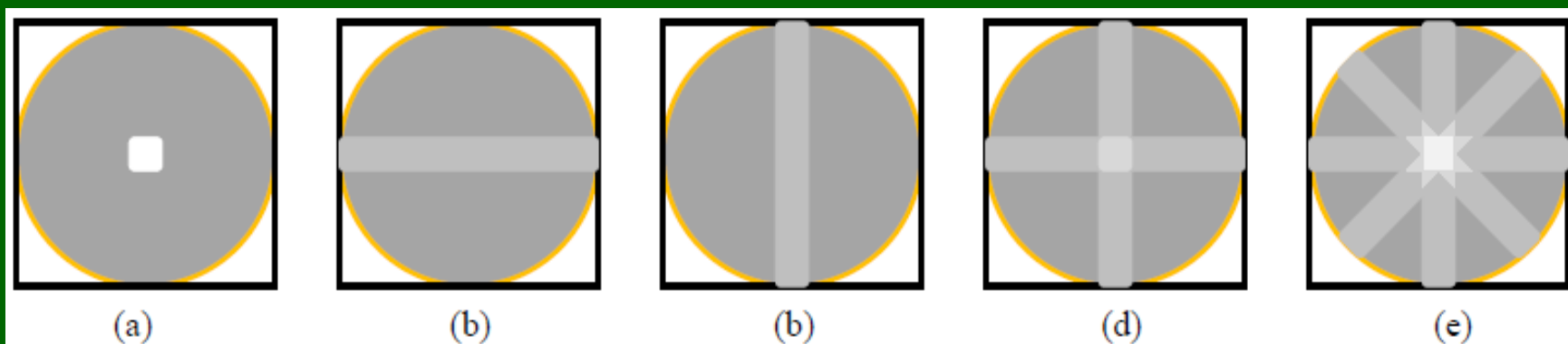
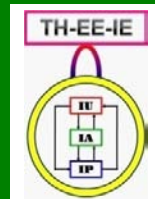


图 7.4.2 逆投影的叠加结果



## 7.4.2 卷积逆投影重建

### 1. 连续公式推导

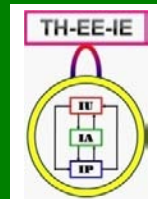
投影定理  $G(R, \theta) = F(R \cos \theta, R \sin \theta)$

在极坐标系中取傅里叶反变换

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} G(R, \theta) \exp[j2\pi R(x \cos \theta + y \sin \theta)] |R| dR d\theta$$
$$G(R, \theta) = \int_{(s, \theta)} g(s, \theta) \exp[-j2\pi R s] ds$$

在有限带宽  $|R| < 1/(2\Delta s)$  的情况下对  $G(R, \theta)$  进行估计

$$\text{定义卷积函数 } h(s) = \int_{-1/(2\Delta s)}^{1/(2\Delta s)} |R| W(R) \exp[j2\pi R s] dR$$



## 7.4.2 卷积逆投影重建

### 1. 连续公式推导

交换对 $s$ 和 $R$ 的积分次序

$$\begin{aligned} f_W(x, y) &= \int_0^\pi \int_{-1/(2\Delta s)}^{1/(2\Delta s)} G(R, \theta) W(R) \exp[j2\pi R(x \cos \theta + y \sin \theta)] |R| dR d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_{-1}^1 g(s, \theta) h(x \cos \theta + y \sin \theta - s) ds d\theta \end{aligned}$$

卷积（滤波）过程

逆投影过程

$$g'(s', \theta) = \int_{-1}^1 g(s, \theta) h(s' - s) ds \quad f_W(x, y) = \int_0^\pi g'(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

## 7.4.2 卷积逆投影重建

### 2. 离散计算

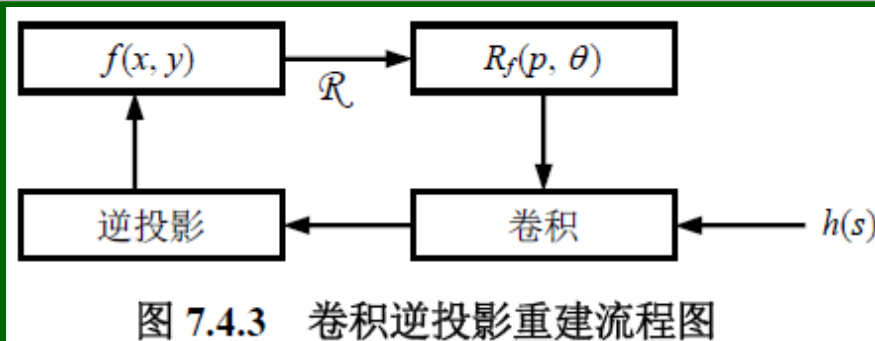
逆投影过程的近似

$$f_W(k\Delta x, l\Delta y) \approx \Delta\theta \sum_{n=1}^N g'(k\Delta x \cos\theta_n + l\Delta y \sin\theta_n, \theta_n)$$

卷积过程的近似（分两步以减少计算量）

离散卷积  $g'_C(m' \Delta s, \theta_n) \approx \Delta s \sum_{m=M^-}^{M^+} g(m\Delta s, \theta_n) h[(m' - m)\Delta s]$

一次插值  $g'_I(s', \theta_n) \approx \Delta s \sum_{n=1}^N g'_C(m \Delta s, \theta_n) I(s' - m\Delta s)$





## 7.4.2 卷积逆投影重建

### 3. 扇束投影重建

缩短投影时间，使用1个发射器和1组接收器

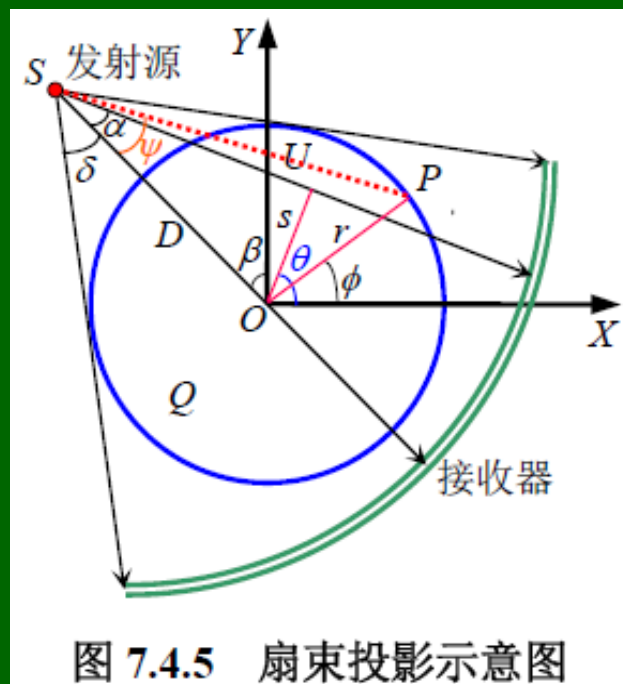
{式(7.4.9) ~ 式(7.4.12)}

$$f_W(r \cos \phi, r \sin \phi)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} g(s, \theta) e^{\{j2\pi R[r \cos(\theta - \phi) - s]\}}$$

$$W(R) |R| d\theta ds dR$$

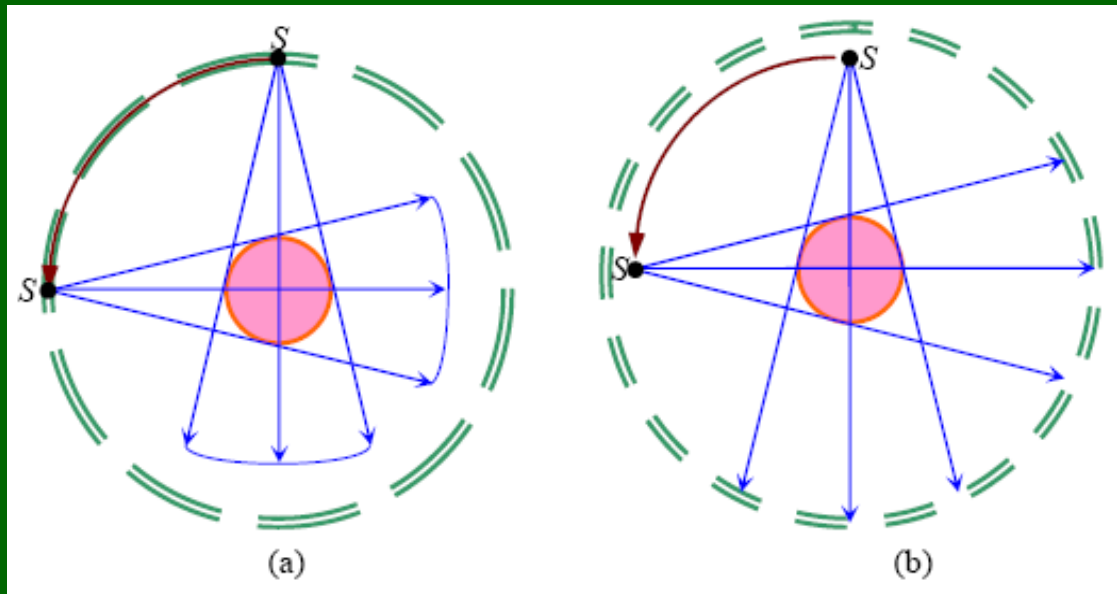
{式(7.4.14) ~ 式(7.4.16)}

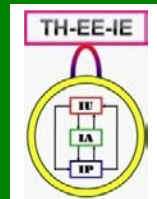


## 7.4.2 卷积逆投影重建

### 3. 扇束投影重建

- (a) 发射器和接收器均旋转
- (b) 发射器旋转，接收器固定





## 7.4.2 卷积逆投影重建

### 4. 傅里叶反变换和卷积逆投影重建法的比较

傅里叶反变换重建：直角坐标

卷积逆投影重建：极坐标

主要优点：

卷积逆投影重建基本算法：

容易用软件和硬件实现

可重建出准确清晰的图象

傅里叶反变换重建：

计算量相对比较小

## 7.4.3 其他逆投影重建方法

### 1. 逆投影滤波

逆投影滤波器（filter of the back-projections）  
先逆投影，再滤波（/卷积）

$$b(x, y) = \mathcal{B}[R_f(x, y)] = \mathcal{B}\mathcal{F}_{(1)}^{-1}\mathcal{F}_{(2)}[f(x, y)]$$

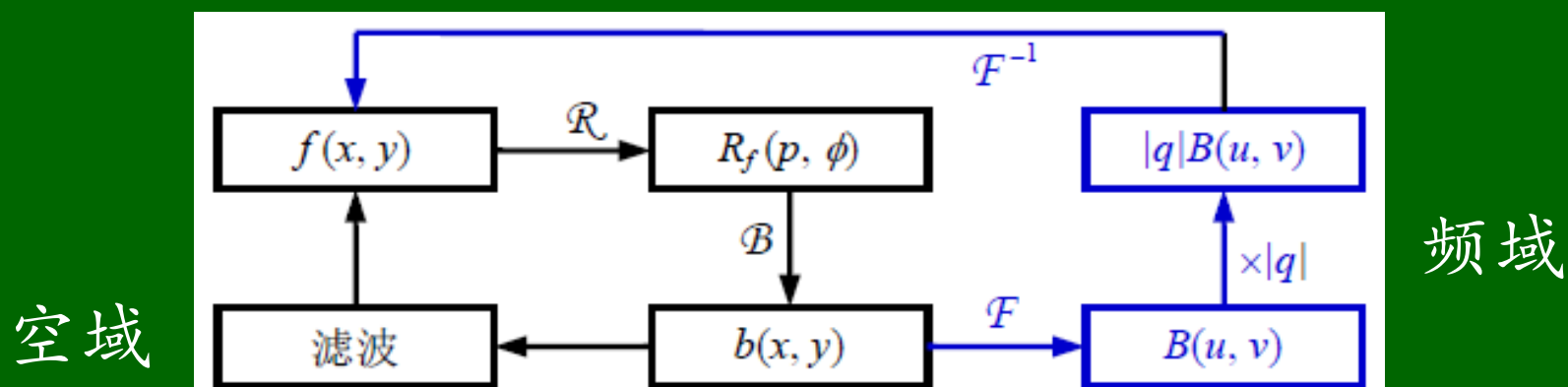


图 7.4.7 逆投影滤波重建流程图

## 7.4.3 其他逆投影重建方法

### 2. 滤波逆投影

(back-projection of the filtered projections)

先对投影滤波，再逆投影

在空域和频域的实现流程分别如图左右部分

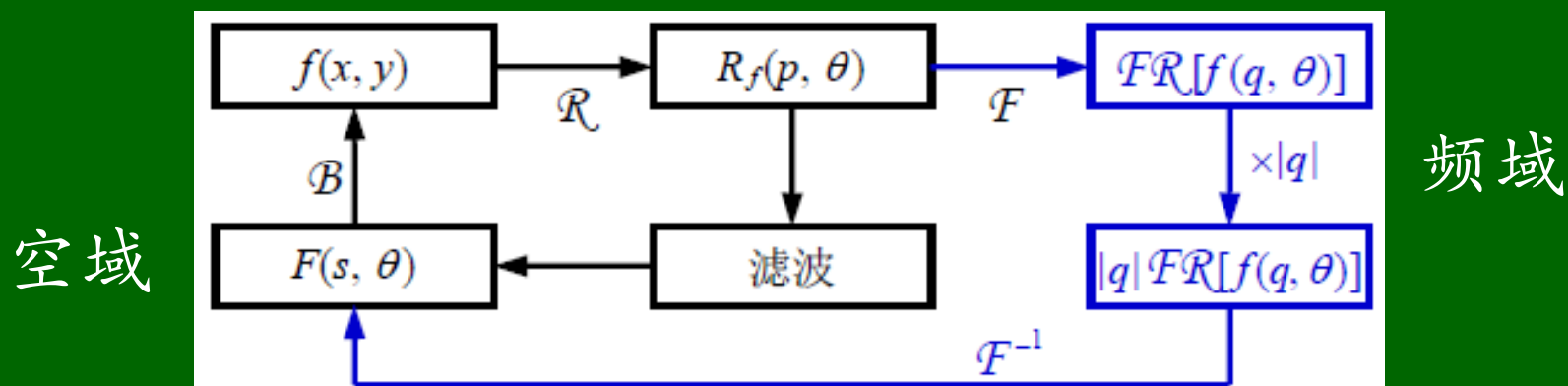


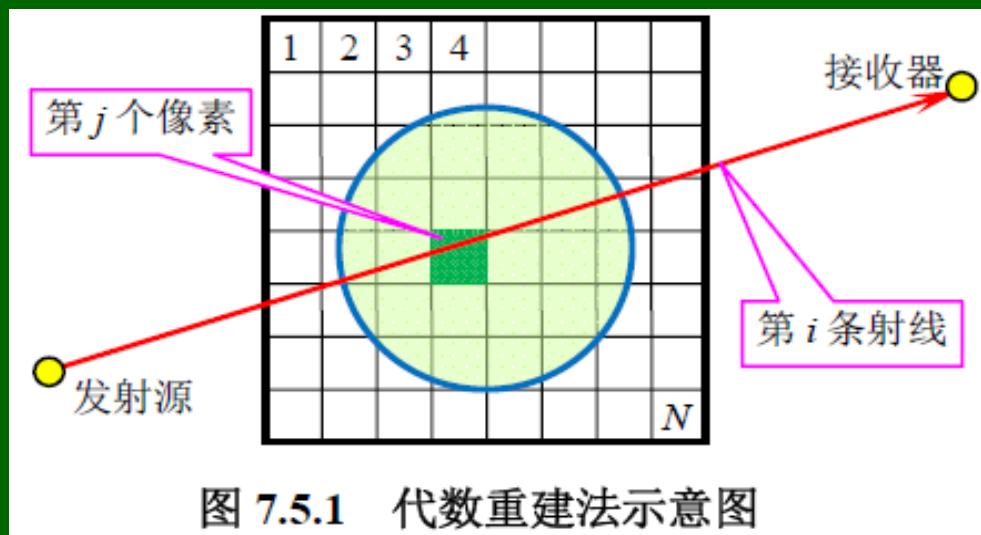
图 7.4.9 滤波投影的逆投影重建流程图

# 7.5 代数重建技术

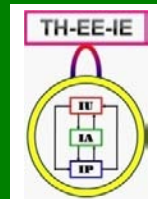
## 1. 离散模型

代数重建法 (ART), 迭代算法, 优化技术

$$y_i \approx \sum_{j=1}^N x_j a_{ij} \quad i=1, 2, \dots, M \quad \text{线性方程组} \quad y = Ax$$



第  $i$  条射线与第  $j$  个像素相交段的长度  $a_{ij}$ , 代表对第  $j$  个像素沿第  $i$  条射线的贡献的权值



## 7.5 代数重建技术

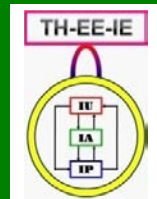
### 2. 无松弛的代数重建技术

先初始化1个图象矢量 $x^{(0)}$ ，然后用下式进行迭代：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{y_i - a^i \cdot x^{(k)}}{\|a^i\|^2} a^i \quad a^i = (a_{ij})_{j=1}^N$$

思路：

每次取1条射线，改变图象中与该线相交象素的灰度值，从而把当前的图象矢量 $x^{(k)}$ 更新为 $x^{(k+1)}$ 。具体运算中就是将测量值与由当前算得的投影数据  $\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^{(k)}$  的差正比于  $a_{ij}$  重新分配到（该射线的）各个象素上去



## 7.5 代数重建技术

### 3. 松弛的代数重建技术

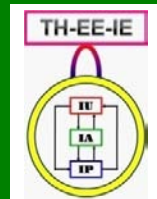
将无松弛的代数重建技术推广：

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \frac{y_i - (\mathbf{a}^i)^r \cdot \mathbf{x}^{(k)}}{\|\mathbf{a}^i\|^2} \mathbf{a}^i \quad \mathbf{a}^i = (\mathbf{a}_{ij})_{j=1}^N$$

$r$ 是松弛系数，它控制了收敛的速度

$r$ 的取值一般在0~2之间，当 $r = 1$ 时，式(7.5.4)变成式(7.5.3)；当 $r$ 很小时，式(7.5.4)变成与传统的最小平方解等价





## 7.5 代数重建技术

### 4. 级数法的一些特点

- (1) 由于在空域中比较灵活，所以容易调整以适应新的应用
- (2) 能重建出较高对比度的图象（对密度突变的材料）
- (3) 借助多次迭代可从较少数量的投影（ $< 10$ ）重建图象
- (4) 比变换法更适合于ECT
- (5) 比变换法更适合于3-D重建问题
- (6) 比变换法更适合于不完整投影情况



## 7.6 综合重建方法

### “综合”

有时体现在公式的推导里，有时体现在实现的方法上，还有时体现在实际的应用中

- (1) 迭代变换法 (iterative transform)
- (2) 迭代重建重投影 (iterative reconstruction re-projection)
- (3) 角谐函数重建法 (reconstruction using angular harmonics)
- (4) 正交多项式展开重建 (reconstruction by polynomial fit to projection)

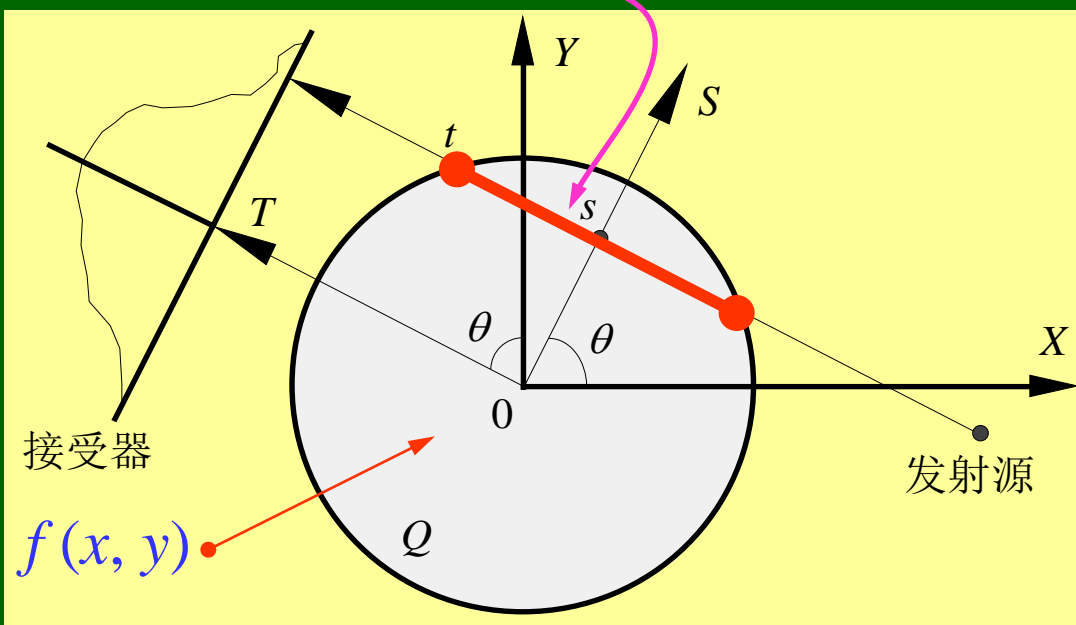
## 7.6 综合重建方法

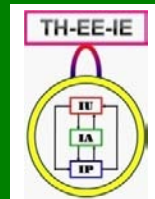
### 迭代变换法 (iterative transform)

$L(s, \theta_n)$  是直线  $(s, \theta_n)$  与  $Q$  相交段的长度

重建工作:

给定函数  $f(x, y)$  的投影  $g(s, \theta_n)$ , 其中  $s$  可以取所有实数,  $\theta_n$  是 1 组  $N$  个离散角度, 要重新得到





## 7.6 综合重建方法

### 迭代变换法 (iterative transform)

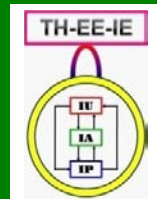
迭代公式 (连续)

$$f^{(i+1)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{如 } (x, y) \notin Q \\ f^{(i)}(x, y) + \frac{g(s, \theta_n) - g^{(i)}(s, \theta_n)}{L(s, \theta_n)} & \text{其他情况} \end{cases}$$

$$n = (i \bmod N) + 1, \quad s = x \cos \theta_n + y \sin \theta_n$$

$g^{(i)}(s, \theta_n)$  是  $f^{(i)}(x, y)$  沿  $\theta_n$  的投影

图象序列  $\{f^{(i)}(x, y) \mid i=1, 2, \dots\}$  将逐步收敛



## 7.6 综合重建方法

### 迭代变换法 (iterative transform)

“半离散”函数  $g(\bullet, \theta_n)$  的离散形式

引进插值函数  $q(\bullet)$  从采样  $g(m\Delta s, \theta_n)$  估计  $g(s, \theta_n)$

引进基函数  $B(x, y)$  从采样  $f(k\Delta x, l\Delta y)$  估计  $f(x, y)$

$$f_{k,l}^{(i+1)} = \begin{cases} 0 & \text{如 } (k\Delta x, l\Delta y) \text{ 不在 } Q \\ f_{k,l}^{(i)} + \frac{\sum_m \left[ g(m\Delta s, \theta_n) - \sum_{k,l} f_{k,l}^{(i)} \times G_{k,l}^{(B)}(m\Delta s, \theta_n) \right] q[s_{k,l}(\theta_n) - m\Delta s]}{L[s_{k,l}(\theta_n), \theta_n]} & \text{在 } Q \end{cases}$$



# 联系信息



- ☞ 通信地址：北京清华大学电子工程系
- ☞ 邮政编码：100084
- ☞ 办公地址：清华大学，罗姆楼，6层305室
- ☞ 办公电话：(010) 62798540
- ☞ 传真号码：(010) 62770317
- ☞ 电子邮件：[zhang-yj@tsinghua.edu.cn](mailto:zhang-yj@tsinghua.edu.cn)
- ☞ 个人主页：[oa.ee.tsinghua.edu.cn/~zhangyujin/](http://oa.ee.tsinghua.edu.cn/~zhangyujin/)