图 象 处 理

（第4版）

章毓晋

清华大学电子工程系 100084 北京

第1单元　图象增强

- **第2章　空域增强：点操作**
- 第3章　空域增强：模板操作
- 第4章　频域图象增强

图象增强技术是最基本和最常用的一大类图象处理技术，也常用于其他图象技术应用的预处理阶段。

目的是通过对图象的特定加工，以将被处理的图象转化为对具体应用来说视觉质量和效果更“好”或更“有用”的图象

第2章 空域增强：点操作

{每次运算基于单个象素（不考虑相对关系）}

2.1 图象坐标变换

2.2 图象间运算

2.3 图象灰度映射

2.4 直方图变换

2.1 图象坐标变换

$\{$改变 $f(x, y)$中的(x, y)

$\Leftrightarrow$ 使各个(x, y)的 f 发生变化$\}$

2.1.1 基本坐标变换

2.1.2 坐标变换扩展

2.1.1 基本坐标变换

齐次坐标

例： 直线方程$ax + by + c = 0$

一条直线也可用矢量$\boldsymbol{l} = [a, b, c]^{\mathrm{T}}$来表示

当k不为零时，矢量$[a,\ b,\ c]^{\mathrm{T}}$和矢量$k[a,\ b,\ c]^{\mathrm{T}}$（齐次矢量）表示同一条直线

这样一些仅差一个尺度k的矢量可认为是等价的。满足这种等价关系的矢量组统称为齐次矢量（homogeneous vector）

2.1.1 基本坐标变换

齐次坐标

对一条直线 $\boldsymbol{l} = [a, b, c]^{\mathrm{T}}$，当且仅当 $ax + by + c = 0$ 时点 $\boldsymbol{x} = [x, y]^{\mathrm{T}}$ 在这条直线上。这可用对应点的矢量 $[x, y, 1]$ 和对应直线的矢量 $[a, b, c]^{\mathrm{T}}$ 的内积来表示，即 $[x, y, 1]\,[a, b, c]^{\mathrm{T}} = [x, y, 1]\,\boldsymbol{l} = 0$

这里，点矢量 $[x, y]^{\mathrm{T}}$ 用一个加了值为1的最后一项的3-D矢量来表示

如同直线一样，点也可用齐次矢量来表示

2.1.1 基本坐标变换

坐标(x, y)，如用齐次坐标，则记为$(x, y, 1)$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}' = \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

2.1.1 基本坐标变换

➢ 平移变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v}' = \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

2.1.1 基本坐标变换

➢ 放缩变换

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v}' = \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

2.1.1 基本坐标变换

➢ 旋转变换

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{R}_\gamma \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v}' = \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

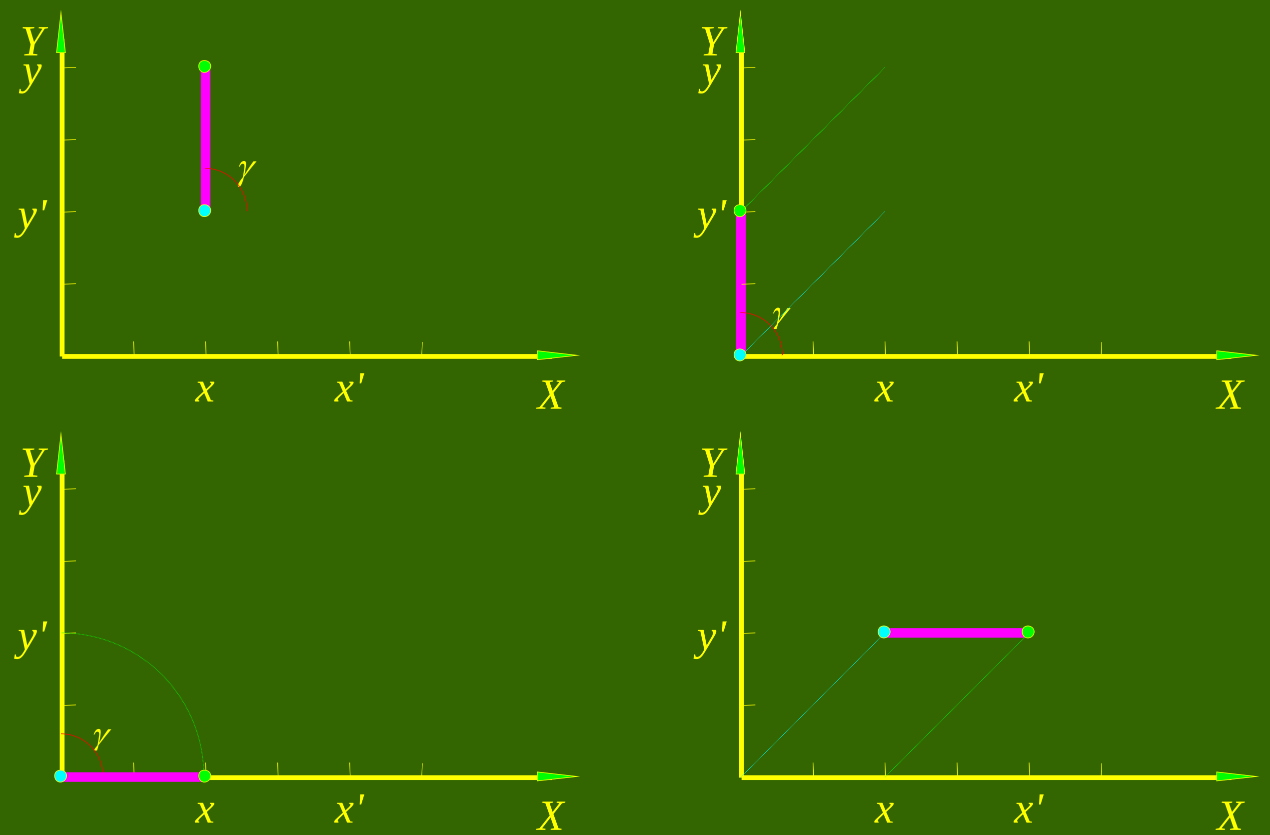
$$\boldsymbol{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕Z轴旋转

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

旋转轴不在原点

绕非原点旋转
=
平移至原点
+
绕原点旋转
+
平移回去



2.1.1 基本坐标变换

- 镜像变换（翻转、反射、反转）

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.2 坐标变换扩展

1. 反变换

逆矩阵

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -T_x\\ 0 & 1 & -T_y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

•对比 (2.1.4)

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}1/S_x & 0 & 0\\ 0 & 1/S_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

•对比 (2.1.5)

$$R_{\gamma}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\gamma) & \sin(-\gamma) & 0\\ -\sin(-\gamma) & \cos(-\gamma) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

•对比 (2.1.6)

2. 变换级连

对一个坐标为$\boldsymbol{v}$的点的平移、放缩、绕Z轴旋转变换（级联起来）可表示为：

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{R}_{\gamma}\left[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})\right] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$$

等价于用单个变换矩阵$\boldsymbol{A}$对点$\boldsymbol{v}$进行变换

这些矩阵的运算次序一般不可互换

2.1.2 坐标变换扩展

2. 变换级连

级连示例

$$
\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
$$

$$
\boldsymbol{v}'_{ST} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{v}'_{TS} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
$$

先平移后放缩 ≠ 先放缩后平移

3. 其他3-点映射变换

拉伸变换

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$L > 1$: 水平放大垂直缩小

$L < 1$: 水平缩小垂直放大

剪切变换

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{h}} = \begin{bmatrix} 1 & J_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ J_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.2 坐标变换扩展

（扩展）基本坐标变换

平移变换，放缩变换，旋转变换，

拉伸变换，剪切变换

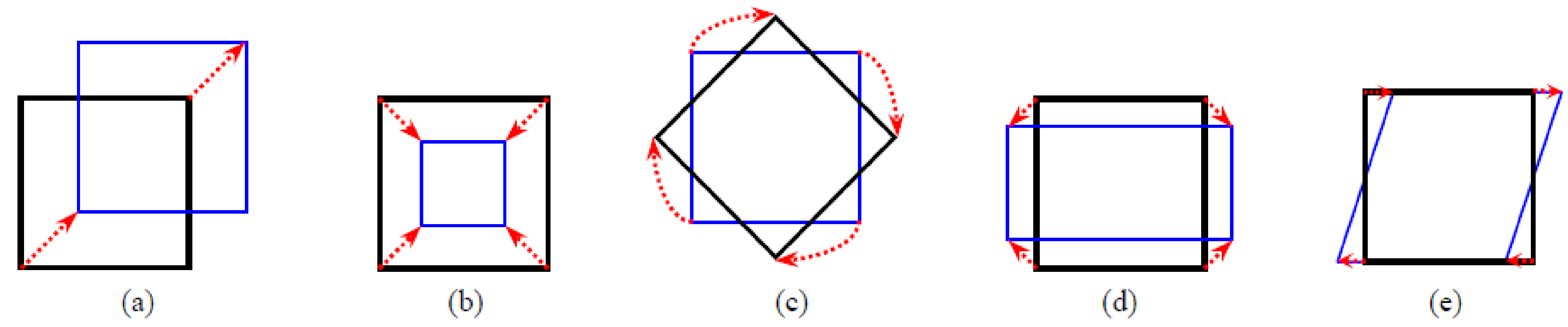


图 2.1.2　五种典型的坐标变换示意

2.1.2 坐标变换扩展

4. 旋转变换的分解

旋转　　　　　垂直剪切放缩　水平剪切放缩

$$
\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\tan\theta & 1/\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned} x'' &= x' \\ y'' &= y'/\cos\theta - x'\tan\theta \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= y \end{aligned}
$$

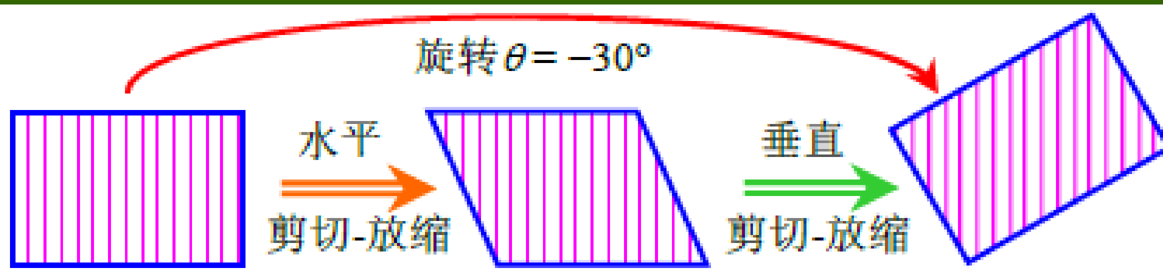


图 2.1.3　通过结合剪切以及水平和垂直方向的放缩来实现快速旋转

2.1.2 坐标变换扩展

4. 旋转变换的分解

旋转　　水平剪切　　垂直剪切　　水平剪切

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \tan(\theta/2) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \tan(\theta/2) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

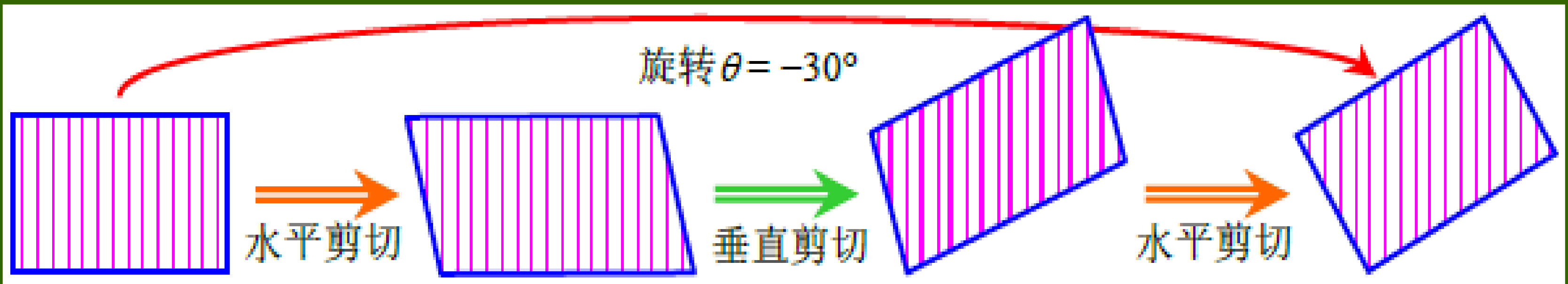


图 2.1.4　将图像旋转分解为 3 个 1-D 剪切变换

2.2 图象间运算

{将图象作为运算单元/对象，逐象素进行}

2.2.1 算术和逻辑运算

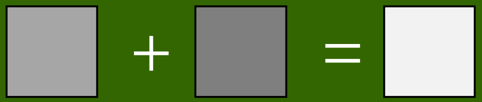
2.2.2 图象间算术运算的应用

2.2.1 算术和逻辑运算

1. 算术运算

分别属于两幅图像对应位置的两个象素 p 和 q

(1) 加法：记为 $p + q$



(2) 减法：记为 $p - q$

(3) 乘法：记为 $p * q$（也可写为 pq 或 $p \times q$）

(4) 除法：记为 $p \div q$

将两个象素的灰度值通过相应运算得到一个新的灰度值，赋给输出图象中对应位置处的象素

2.2.1 算术和逻辑运算

2. 逻辑运算

(1) 补（COMPLEMENT）：记为 NOT q

(2) 与（AND）：记为 p AND q

(3) 或（OR）：记为 p OR q

(4) 异或（XOR）：记为 p XOR q

{例2.2.1，图2.2.1}

➢ 组合基本逻辑运算

{例2.2.2，图2.2.2}

2.2.2 图象间算术运算的应用

1. 图象间加法的应用

{去除采集噪声}

模型 $g(x,y) = f(x,y) + e(x,y)$

运算 $\bar{g}(x,y) = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} g_i(x,y)$

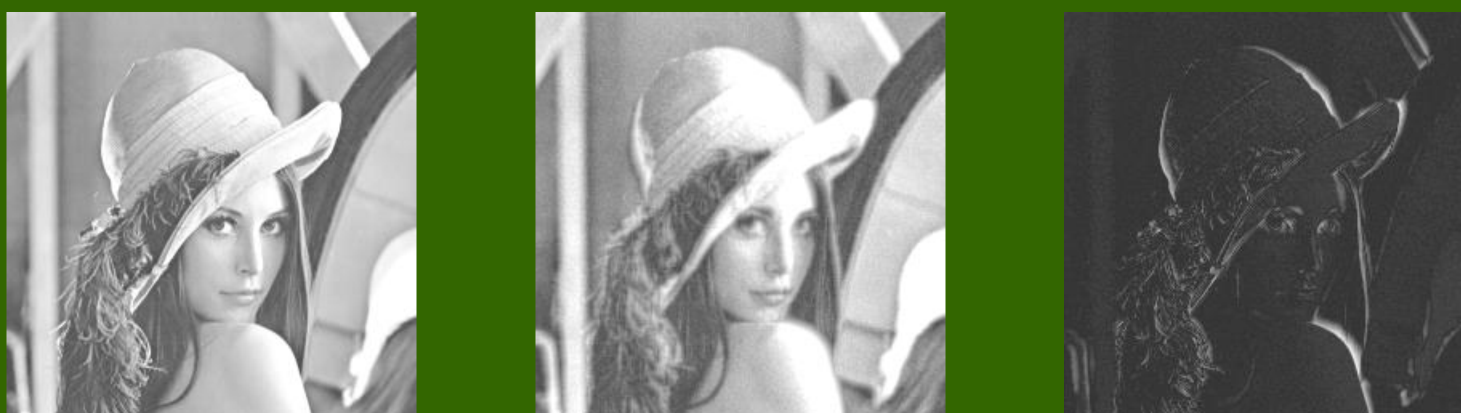
均值 $E\{\bar{g}(x,y)\} = f(x,y)$

均方差 $\sigma_{\bar{g}(x,y)} = \sqrt{1/M} \times \sigma_{e(x,y)}$ {图2.2.3}

2. 图象间减法的应用

两图相减运算可把差异凸显出来

$$g(x,y) = f(x,y) - h(x,y)$$



{例2.2.4}

2.2.2 图象间算术运算的应用

3. 图象间乘法和除法的应用

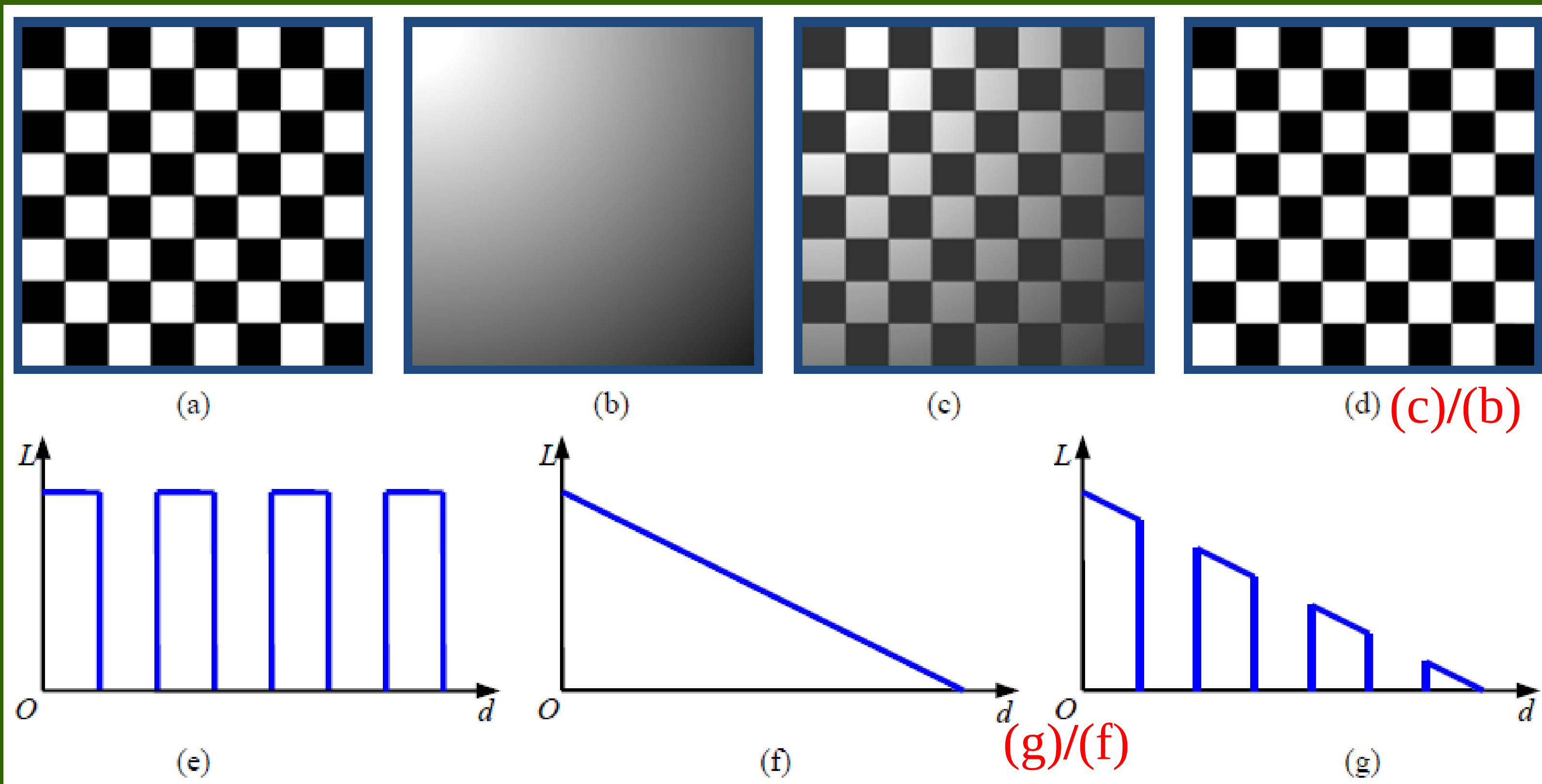


图 2.2.5 利用图像除法来校正照明的非均匀性

2.3 图象灰度映射

{将 $f(x, y)$ 中的每个象素灰度按映射 E_H 操作，直接变换以得到 $g(x, y)$}

$$g(x, y) = E_H[f(x, y)]$$

2.3.1 灰度映射原理

2.3.2 典型灰度映射

2.3.1 灰度映射原理

灰度映射函数

$$t = E_{\mathrm{H}}(s)$$

增强灰度值　　　　原始灰度值

二维码

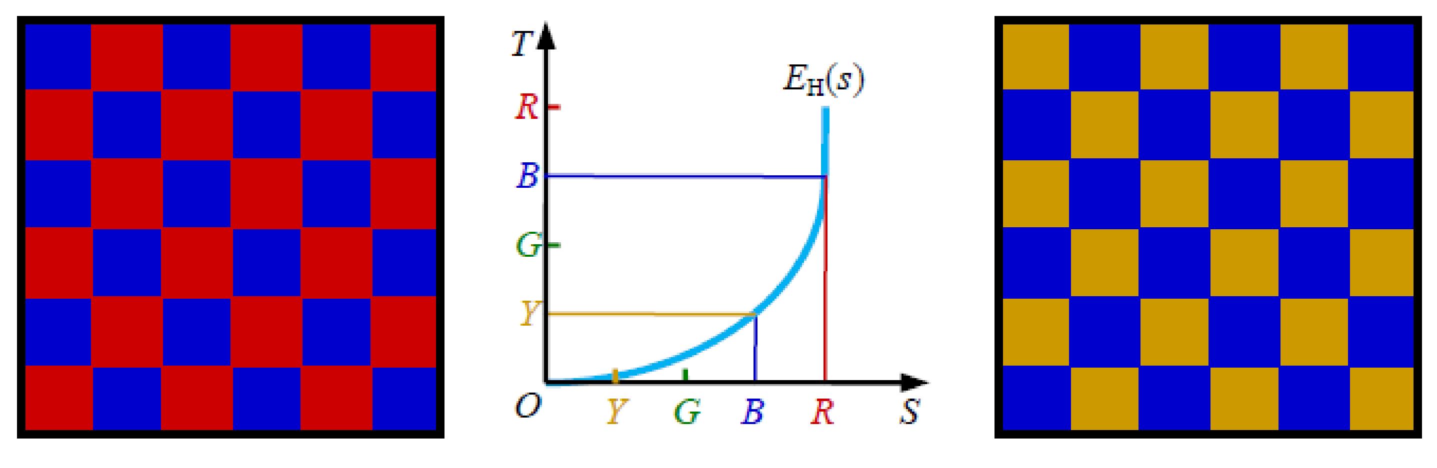


图 2.3.1　图像灰度映射原理

2.3.1 灰度映射原理

灰度映射函数

{图2.3.2}

$$t = E_{\mathrm{H}}(s)$$

增强灰度值

原始灰度值

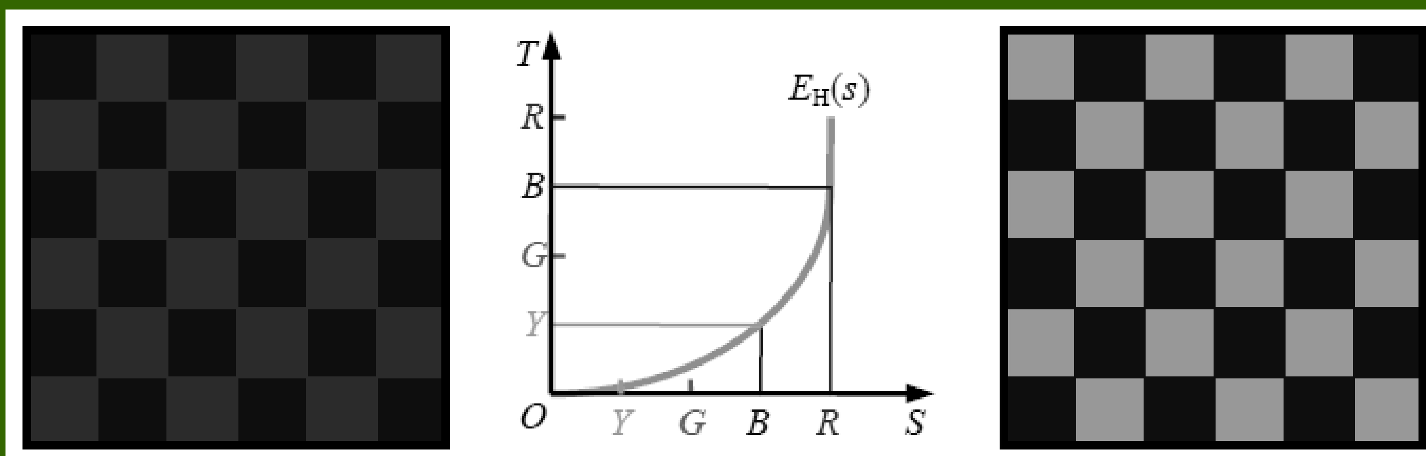


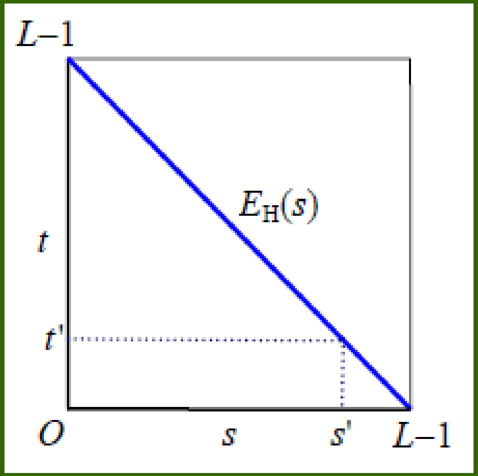
图 2.3.1　图像灰度映射原理

2.3.2 典型灰度映射

1、图象求反

（照片和底片）

$$t = (L-1) - s$$

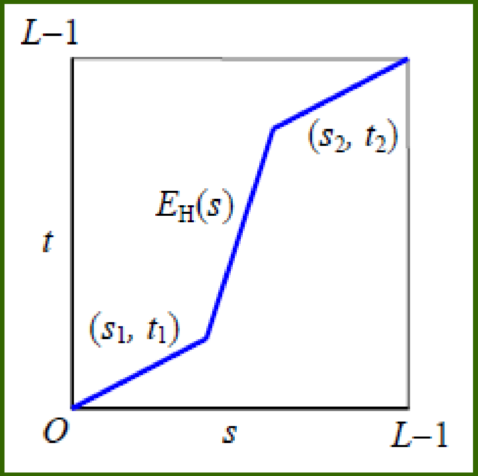


2.3.2 典型灰度映射

2、增强对比度

各段斜率不同

$$t = \begin{cases} as & 0 < s < s_1 \\ bs + d & s_1 < s < s_2 \\ cs + e & s_2 < s < L-1 \end{cases}$$

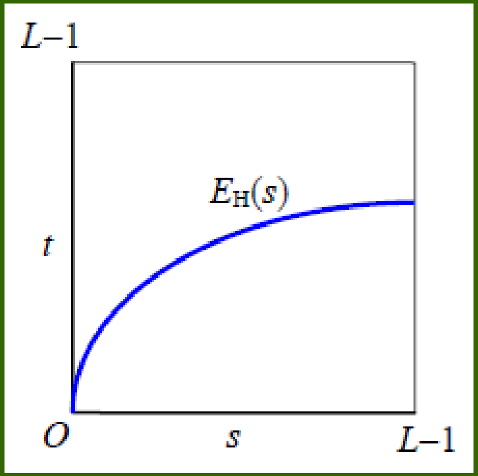


2.3.2 典型灰度映射

3、动态范围压缩

$$t = C\log(1+|s|)$$

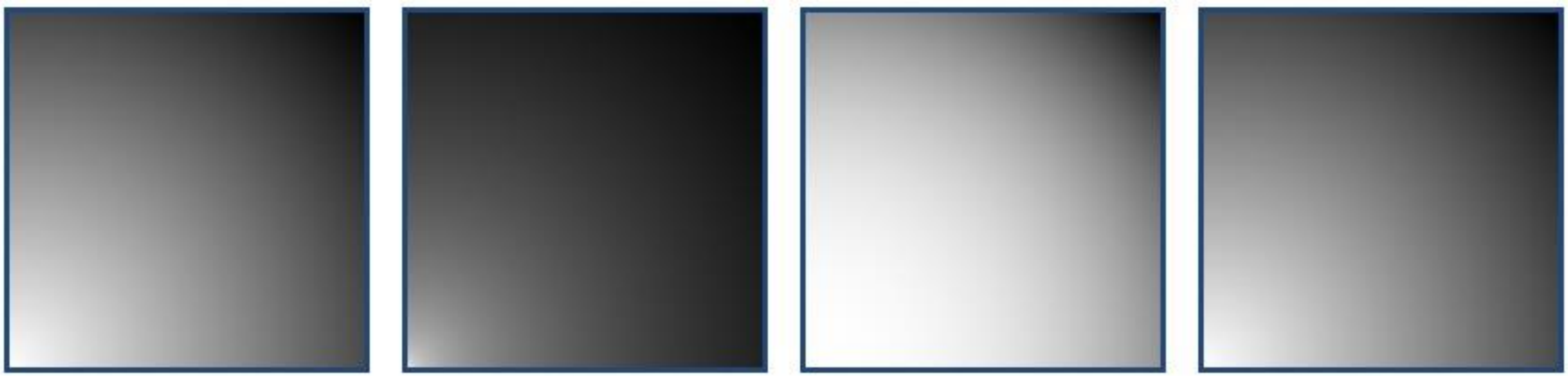
$$t = \sqrt{(L-1)^2 - (s-L+1)^2}$$



2.3.2 典型灰度映射

4、伽马校正 $t = Cs^{\gamma}$ （指数变换）

$\gamma < 1$ 变换的结果是输入中较窄的低灰度范围被映射到输出中较宽的灰度范围，而同时输入中较宽的高灰度范围被映射到输出中较窄的灰度范围



原始图象 直接显示 $\gamma = 0.4$ 输出图象

图 2.3.5 伽玛校正示例

2.4 直方图变换

{以概率论为基础，通过改变图象的直方图来改变图象中象素的灰度，以实现图象增强。也常称**直方图修正**}

2.4.1 直方图均衡化

2.4.2 直方图规定化

2.4.1 直方图均衡化

灰度统计直方图

1-D的离散函数（以灰度值为自变量）

提供了图象象素的灰度值分布情况

计算：

设置一个共有 *L* 个元素的数组，对原图的灰度值进行统计

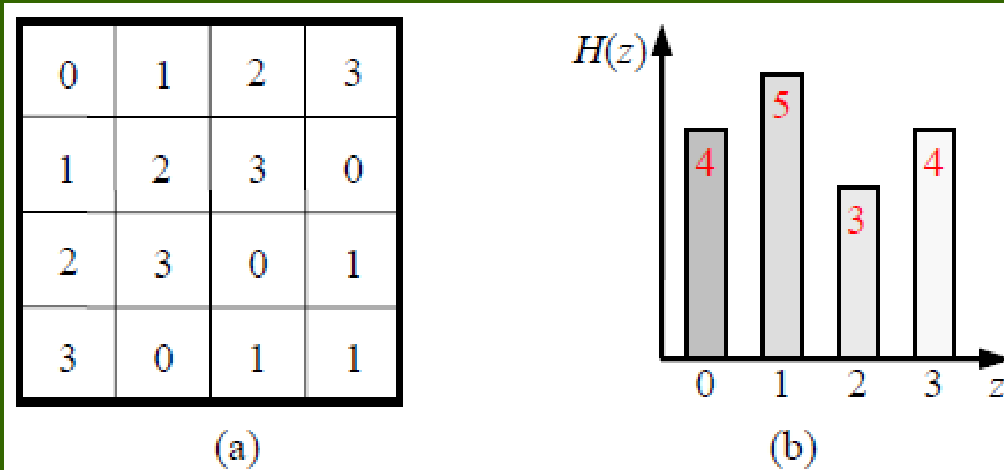
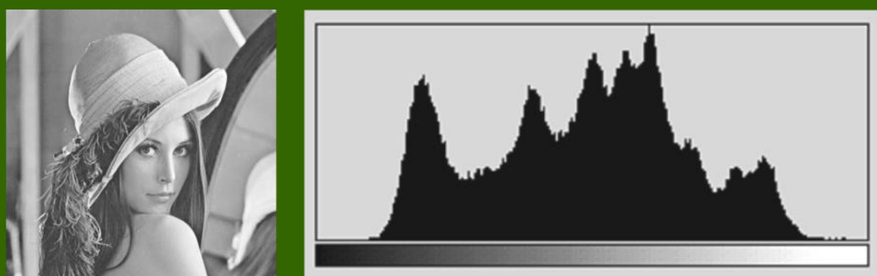


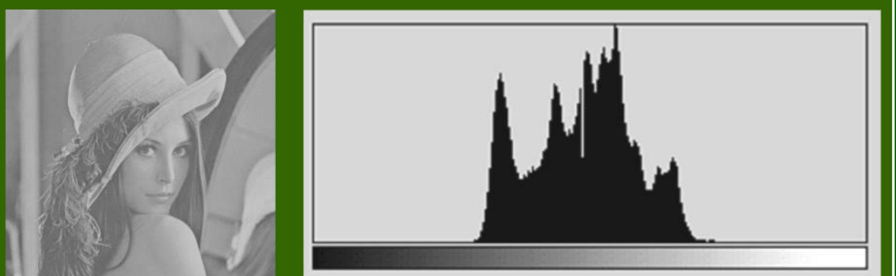
图 2.4.1 图像和直方图

2.4.1 直方图均衡化

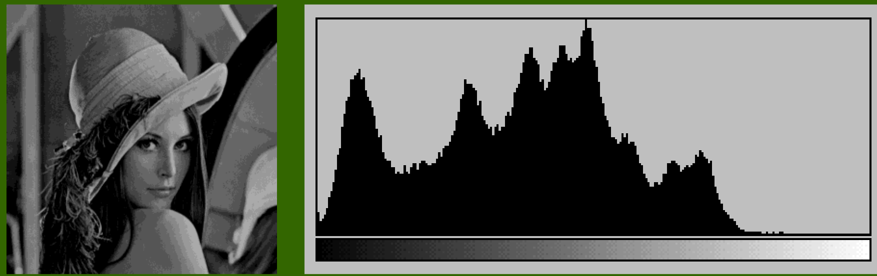
直方图与图象的视觉效果密切相关



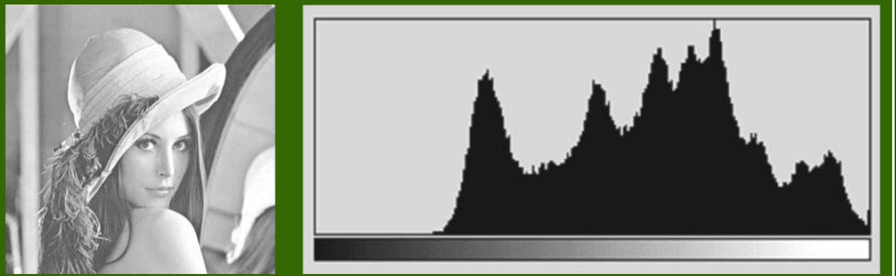
动态范围正常



动态范围偏小



整体偏暗



整体偏亮

2.4.1 直方图均衡化

直方图均衡化原理

借助直方图变换实现（归一的）灰度映射

均衡化（线性化）基本思想

变换原始图象的直方图为均匀分布

==> 灰度层次丰富

使象素灰度值的动态范围最大

==> 增强图象整体对比度（反差）

2.4.1 直方图均衡化

归一化直方图

$$p_s(s_k) = n_k / N \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant s_k \leqslant 1 \\ k = 0,\ 1,\ \cdots,\ L-1 \end{array}$$

增强函数 $E_{\mathrm{H}}(s)$

(1) 单值单增函数， $0 \leqslant s \leqslant L-1$

各灰度级在变换后仍保持排列次序

(2) $0 \leqslant E_{\mathrm{H}}(s) \leqslant L-1$

变换前后灰度值动态范围一致

2.4.1 直方图均衡化

- 累积直方图——满足条件的增强函数

1-D的离散函数

提供了图象象素灰度值的累积分布情况

$$t_k = E_H(s_k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{n_i}{N} = \sum_{i=0}^{k} p_s(s_i)$$

(1) t_k 是 k 的单值单增函数

(2) 灰度取值范围一致，$0 \leqslant t_k \leqslant 1$

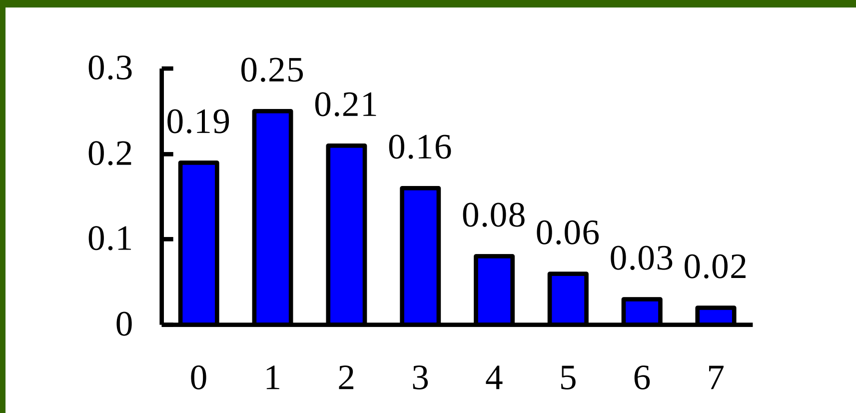
(3) 将 s 的分布转换为 t 的均匀分布

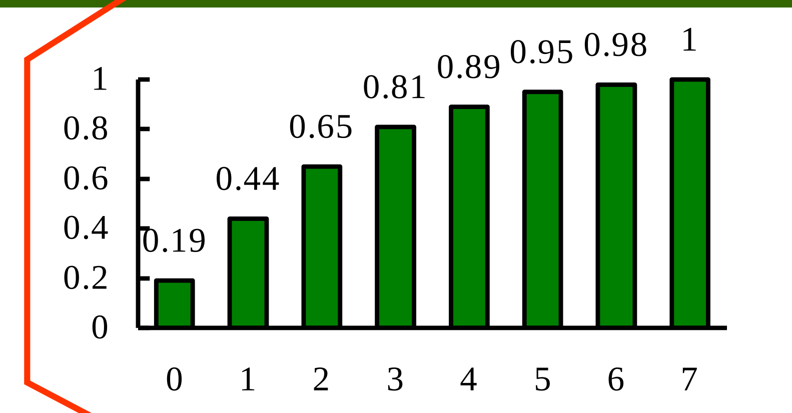
2.4.1 直方图均衡化

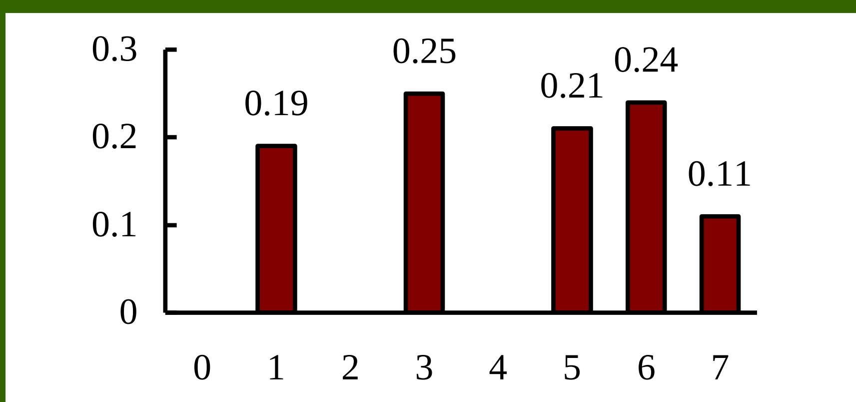
直方图均衡化示例

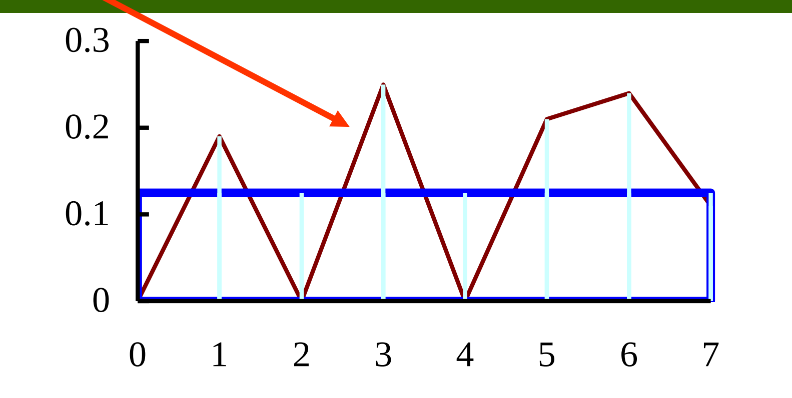
为什么不平？

{表2.4.1}





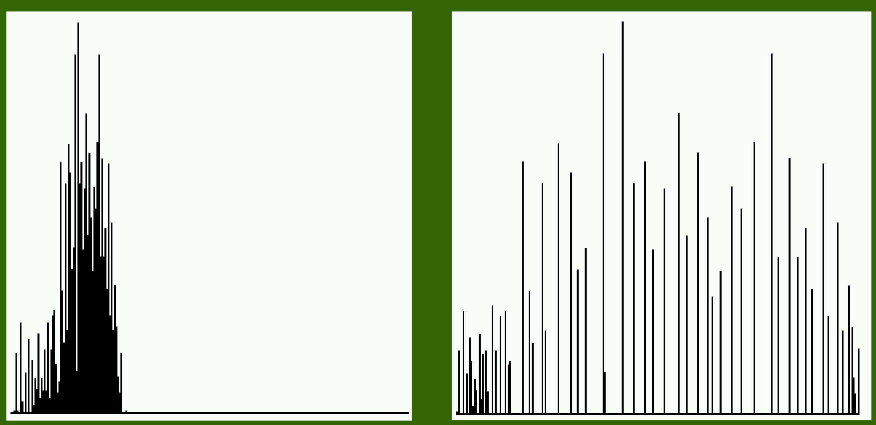




2.4.1 直方图均衡化

直方图均衡化的效果

图象对比　　　　直方图对比



(1) 原来同一灰度的象素变换后如何？

(2) 为什么各直方条（bin）间有空隙？

2.4.2 直方图规定化

直方图规定化 vs. 直方图均衡化

直方图均衡化：　自动增强

效果不易控制

总得到全图增强的结果

直方图规定化：　有选择地增强

须给定需要的直方图

可得到特定增强的结果

2.4.2 直方图规定化

借助直方图变换实现规定/特定的灰度映射

三个步骤

(1) 对原始直方图进行灰度均衡化

$$t_k = E_{Hs}(s_i) = \sum_{i=0}^{k} p_s(s_i)$$

(2) 规定所需要的直方图，计算能使规定直方图均衡化的变换

$$v_l = E_{Hu}(u_j) = \sum_{j=0}^{l} p_u(u_j)$$

(3) 将原始直方图对应映射到规定直方图

2.4.2 直方图规定化

两种映射/对应规则

(1) 单映射规则

$$\min\left|\sum_{i=0}^{k} p_s(s_i) - \sum_{j=0}^{l} p_u(u_j)\right| \qquad \begin{array}{l} k = 0,\ 1,\ \cdots,\ M-1 \\ l = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1 \end{array}$$

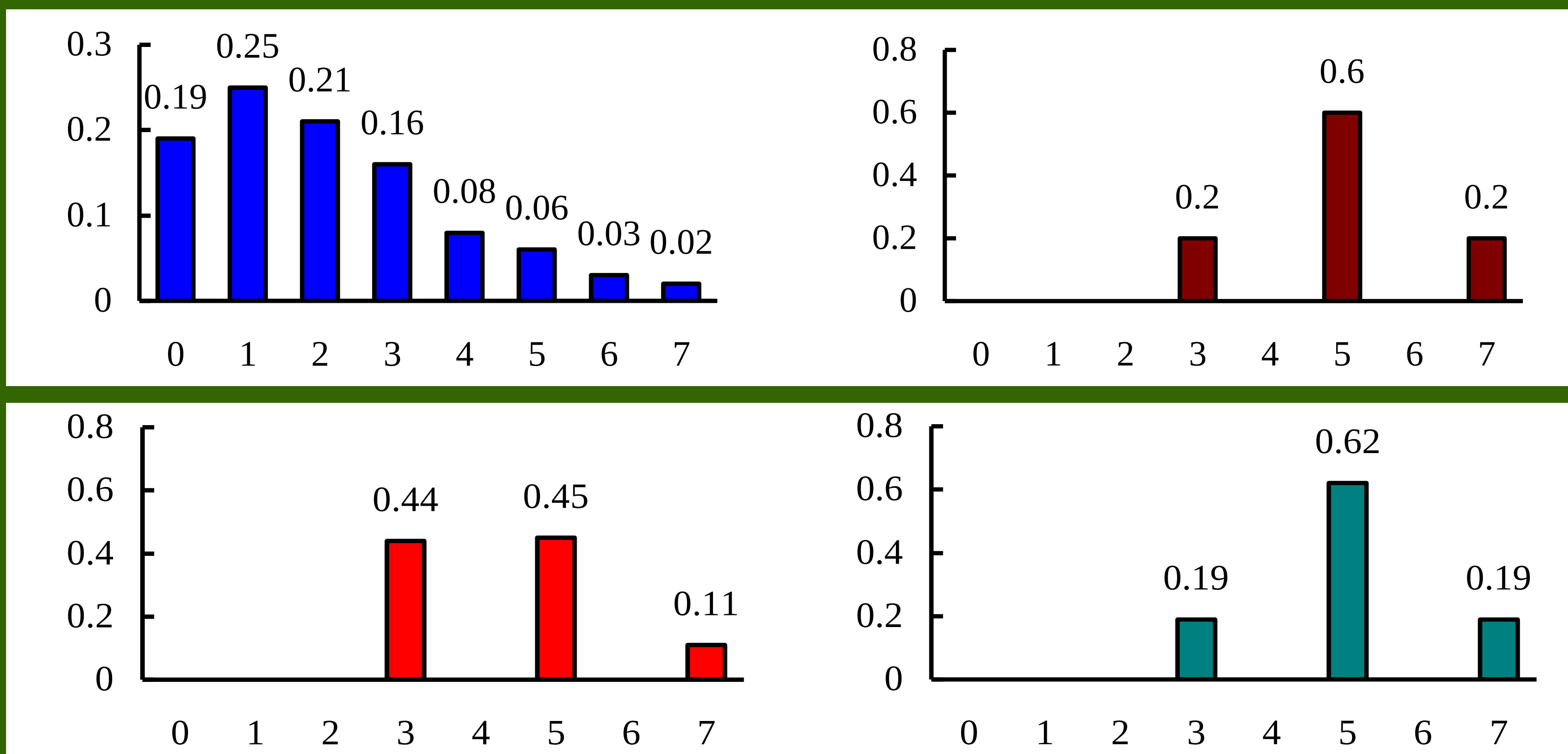
(2) 组映射规则（$I(l)$：整数函数）

$$\min\left|\sum_{i=0}^{I(l)} p_s(s_i) - \sum_{j=0}^{l} p_u(u_j)\right| \qquad l = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$$

2.4.2 直方图规定化

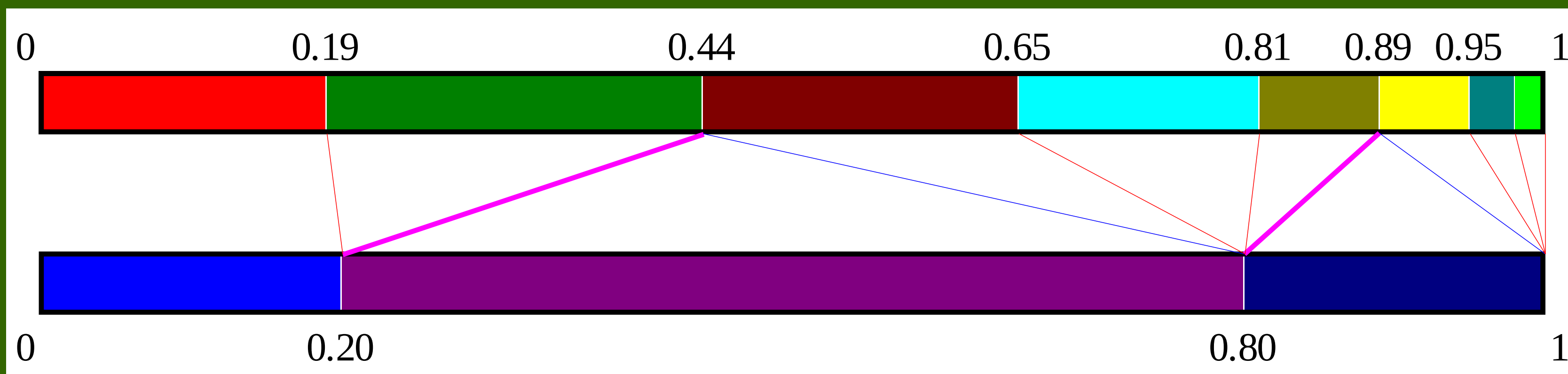
直方图规定化示例

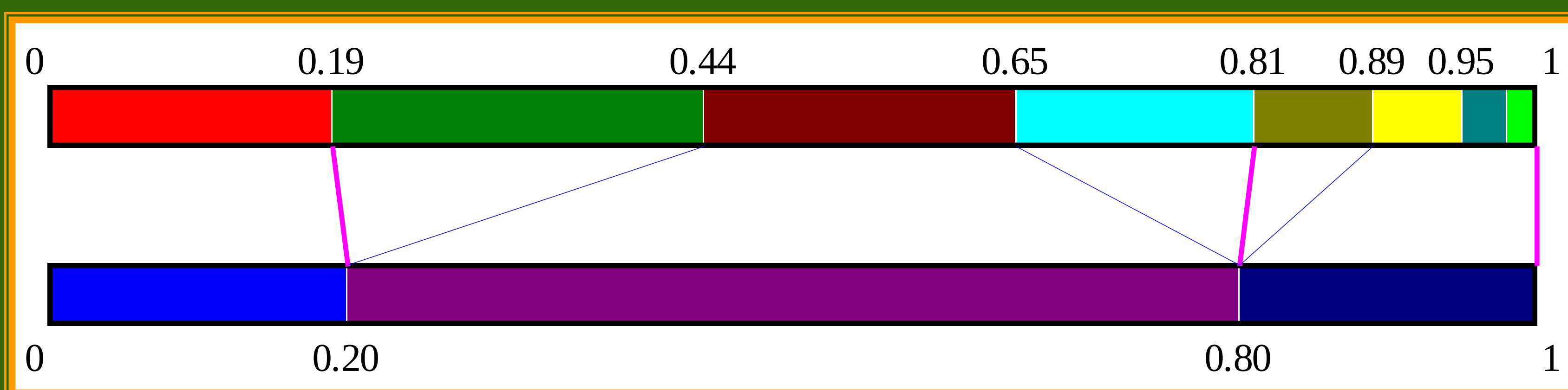
{表2.4.2}



2.4.2 直方图规定化

单映射规则 vs. 组映射规则　(2.4.7) vs. (2.4.8)





2.4.2 直方图规定化

映射误差

各对应映射间数值的差值（取绝对值）的和

单映射规则：最大误差为 $p_u(u_j)/2$

组映射规则：最大误差为 $p_s(s_i)/2$

$$\because\ N \leqslant M，\ \therefore\ p_s(s_i)/2 \leqslant p_u(u_j)/2$$

单映射规则：有偏的映射规则

组映射规则：统计无偏的映射规则

{P.49：映射误差及期望值}

总结和复习

2.1节　介绍了几种最基本的图象坐标变换，可以级联和反变换

2.2节　介绍了图象之间的运算，包括算术运算和逻辑运算

2.3节　介绍了直接利用灰度映射来增强图象的方法，关键是设计变换函数

2.4节　介绍利用直方图变换来增强图象的方法，包括均衡化和规定化

联　系　信　息

- 通信地址：北京清华大学电子工程系
- 邮政编码：100084
- 办公地址：清华大学，罗姆楼，6层305室
- 办公电话：(010) 62798540
- 传真号码：(010) 62770317
- 电子邮件：zhang-yj@tsinghua.edu.cn
- 个人主页：oa.ee.tsinghua.edu.cn/~zhangyujin/