图象工程（下）

图 象 理 解

（第4版）

章毓晋
清华大学电子工程系 100084 北京

第1单元 采集表达

第2章 摄象机成象
- ➢ **第3章 压缩感知与成象**

第4章 深度信息采集
第5章 3-D景物表达

✓ 从图象出发，认识和理解世界
需要获得能反映场景内容和本质的图象
需要用尽少的采样精确地重构原信号
需要采集含有全面立体信息的图象
需要有对3-D空间景物的3-D表达方法

第3章 压缩感知

3.1 压缩感知概述

压缩感知的3个关键处理步骤：

（1）**稀疏表达**：判断信号是否具有稀疏性是实现压缩感知的前提

（2）**测量编码**：对信号进行测量/观测，从而得到感知测量值，即进行测量编码。测量矩阵是压缩感知理论能否成功实现的关键

（3）**解码重构**：运用压缩测量的低维数据（感知测量值）精确地重构高维原始信号。这是压缩感知模型求解的保证，也是压缩感知的核心部分

3.1 压缩感知概述

压缩感知的流程框图

第一行的3个框：压缩感知的3个关键处理步骤

第二行的3个框：实现压缩感知要完成的3个工作

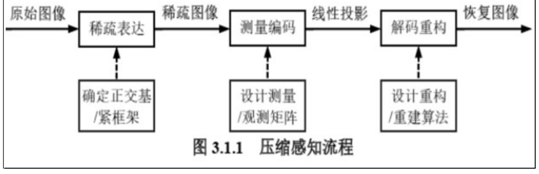

图 3.1.1 压缩感知流程

3.2 稀疏表达

1. 矢量空间

矢量$\boldsymbol{x}$的范数L_p（$p \geq 1$）

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ \max|x_i| & p = \infty \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

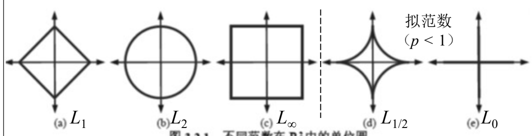

图 3.2.1 不同范数在 R^2 中的单位圆

3.2　稀疏表达

2.　基和框架

考虑矢量集$\boldsymbol{\Psi} = \{\psi_i\}$，$i = 1, 2, \ldots, N$，如果其中的矢量可以生成矢量空间$V = \mathbb{R}^N$，而且矢量$\psi_i$之间是非线性相关的，则$\boldsymbol{\Psi}$可以称为有限维矢量空间$V$中的**基**

标准正交集就是一种特殊的基：矢量集$\boldsymbol{\Psi} = \{\psi_i\}$，其中所有矢量之间是正交的且每个基的范数都为单位1，即$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{I}$

对于任何属于该矢量空间中的矢量$\boldsymbol{x}$，可以很容易地计算出系数$\boldsymbol{a}$，即$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

3.2　稀疏表达

2.　基和框架

把基的概念推广到一些可能线性相关的矢量集就形成列**框架**，即矢量集$\boldsymbol{\Psi}=\{\psi_i\}_{i=1}^{N}$且$\psi_i \in \mathbb{R}^d$，其中$d < N$，相当于矩阵$\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{d\times N}$，对所有矢量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$满足

$$L\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \le \|\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\|_2^2 \le R\|\boldsymbol{x}\|_2^2$$

如果L被选为使这个不等式成立的可能存在的最大值，R被选为使这个不等式成立的可能存在的最小值，则把它们称为无框架界。如果$L = R$，则这个框架称为紧框架。如果$\boldsymbol{\Psi}$是一个有限维矩阵，则L和R分别对应$\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$的最小特征值和最大特征值

3.2　稀疏表达

3.　稀疏性表达

为了更精炼地表达一个信号，可以把信号变换到一个新的基或框架下，当非零系数的个数远远少于原始信号的项数时，可以把这些少量的非零系数称为原始信号的**稀疏性表达**

在稀疏性表达中，常把基或框架称为**字典**或过完备字典，而把其中的矢量元素称为**原子**

从数学的角度看，当信号$\boldsymbol{x}$中最多有K个非零的值时，称信号$\boldsymbol{x}$是K稀疏的，即$\|\boldsymbol{x}\|_0 \le K$，可以采用$\Sigma_K = \{\boldsymbol{x}: \|\boldsymbol{x}\|_0 \le K\}$来表示所有$K$稀疏信号的集合

3.3　测量矩阵及特性

3.3.1　采样/测量模型

3.3.2　测量矩阵特性

3.3.1　采样/测量模型

根据压缩感知的原理，通过一个测量矩阵$\boldsymbol{\Phi}$获取对$\boldsymbol{x}$的M个线性观测/测量。$\boldsymbol{\Phi}$是一个固定的$M \times N$矩阵，一般有$K < M << N$

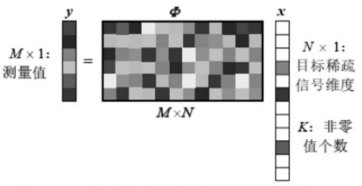

图 3.3.2　针对本身稀疏信号的测量模型

3.3.1　采样/测量模型

对本身并不稀疏的信号，可通过将其变换到一个新的基或框架下而使其表现出稀疏特性

如$\boldsymbol{x}$在$\boldsymbol{\Psi}$中体现出稀疏性，即$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{z}$，则可合并$\boldsymbol{\Phi}$和$\boldsymbol{\Psi}$

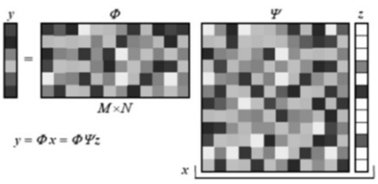

图 3.3.3　具有普适性的测量模型

3.3.2 测量矩阵特性

1. 零空间及其特性

对一个矩阵$\boldsymbol{\Phi}$，其零空间可定义为$\mathcal{N}(\boldsymbol{\Phi})$

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{\Phi}) = \{\boldsymbol{z} : \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{z} = 0\}$$

对任意稀疏信号$\boldsymbol{x}$，如果希望基于测量值$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}$无失真地重建该稀疏信号$\boldsymbol{x}$，则对任意两个矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{x}' \in \Sigma_K = \{z: \|z\|_0 \le K\}$，一定有$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}'$，由此得到$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = 0$，其中$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{h} \in \Sigma_{2K}$

用矩阵$\boldsymbol{\Phi}$可以唯一地表达$\boldsymbol{x}$的充分必要条件是$\boldsymbol{\Phi}$的零空间$\mathcal{N}(\boldsymbol{\Phi})$不含有任何$\Sigma_{2K}$中的元素，即$\mathcal{N}(\boldsymbol{\Phi})$与$\Sigma_{2K}$的交集是空集

3.3.2 测量矩阵特性

1. 零空间及其特性

假设$S \subset \{1, 2, \ldots\ldots, N\}$是一个索引集的子集，$S^C = \{1, 2, \ldots\ldots, N\}\backslash S$是其相应的补集，则矢量$\boldsymbol{x}_S$表示长度为$N$的矢量，且这个矢量中所有下标属于集合$S^C$的元素都被设为0。类似地，矩阵$\boldsymbol{\Phi}_S$表示长度为$M \times N$的矢量，且其所有下标属于集合$S^C$的列矢量都被设为零矢量

矩阵$\boldsymbol{\Phi}$满足K阶零空间特性：存在一个常数$C > 0$，使得右式对所有$\boldsymbol{h} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\Phi})$和所有$|S| \le K$的$S$都成立

$$\|\boldsymbol{h}_S\| \le C\frac{\|\boldsymbol{h}_{S^c}\|_1}{\sqrt{K}}$$

3.3.2 测量矩阵特性

2. 约束等距特性

零空间特性是确保重建的必要条件

当测量值有噪声或在量化时引入误差时，需要讨论更为严格的重建条件

如果存在$\delta_K \in (0, 1)$，使得

$$(1-\delta_K)\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \le \|\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}\|_2^2 \le (1+\delta_K)\|\boldsymbol{x}\|_2^2$$

对所有$\boldsymbol{x} \in \Sigma_K\{\boldsymbol{x}: \|\boldsymbol{x}\|_0 \le K\}$都成立，则称矩阵$\boldsymbol{\Phi}$满足$K$阶约束等距特性，$\delta_K$称为矩阵$\boldsymbol{\Phi}$的**约束等距常数**（$\delta_K$是对所有$K$阶稀疏矢量$\boldsymbol{x}$均满足的最小常数）

3.4 解码重构

3.4.1 重构原理

1. 基本重构模型

假设矢量$\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^N$是一个长度为$N$的稀疏信号，测量矩阵$\boldsymbol{\Phi}$: $\mathrm{R}^N \to \mathrm{R}^M$已知，要基于很少的测量值$\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^M$，$M < N$重建原始目标信号$\boldsymbol{x}$

$\min\|\boldsymbol{x}\|_0$, s.t. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}$, 测量值无噪声的情况

$\min\|\boldsymbol{x}\|_0$, s.t. $\|\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \le \varepsilon$, 测量值存在少量有界噪声的情况

原始目标信号在某个正交变换域或$\boldsymbol{\Phi}$中，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{z}$

$\min\|\boldsymbol{z}\|_0$, s.t. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{x}$, 测量值无噪声的情况

$\min\|\boldsymbol{z}\|_0$, s.t. $\|\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \le \varepsilon$, 测量值存在少量有界噪声的情况

3.4.1 重构原理

1. 基本重构模型

一个组合优化问题，也是一个NP难题

可采用凸的L_1范数来近似非凸的L_0范数，把组合优化问题转化为凸优化问题

当测量值没有噪声时，得到如下基本追踪表达式：

$$\min\|\boldsymbol{x}\|_1, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}$$

当测量值存在少量有界噪声时，得到如下基本追踪去噪表达式：

$$\min\|\boldsymbol{x}\|_1, \quad \text{s.t. } \|\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \le \varepsilon$$

3.4.1 重构原理

2. 无噪声稀疏信号重构

考虑一个更为通用的无噪声稀疏信号重构问题

$$\boxed{\boldsymbol{x}' = \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmin}} \|\boldsymbol{x}\|_1, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{y})}$$

其中，$B(\boldsymbol{y})$确保$\boldsymbol{x}'$与测量值$\boldsymbol{y}$保持一致，$\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{\Phi x} = \boldsymbol{y}\}$

可以证明，当$\boldsymbol{x} \in \Sigma_K = \{\boldsymbol{x}: \|\boldsymbol{x}\|_0 \le K\}$时，如果$\boldsymbol{\Phi}$满足约束等距特性，则只要$O(K\ln(N/K))$个采样值就可以无失真地重建任何包含$K$个非零元素的目标信号$\boldsymbol{x}$，而不需考虑这$K$个非零元素具体如何分布

3.4.1 重构原理

3. 有噪声稀疏信号重构

考虑一个通用的、存在噪声污染情况下的稀疏信号重构问题

$$\boldsymbol{x}' = \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmin}} \|\boldsymbol{x}\|_1, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{y})$$

其中，$B(\boldsymbol{y})$确保$\boldsymbol{x}'$与测量值$\boldsymbol{y}$保持一致。$B(\boldsymbol{y})$可有多种选择，下面两种情况重构都是有界的

（1）有界噪声污染信号的重构

（2）高斯噪声污染信号的重构

{P.64}

3.4.2 测量矩阵的校准

<u>如测量矩阵本身存在噪声，则要考虑校准问题</u>

(1) 忽略这个问题，这有可能明显影响重建精度

(2) 把由非精确测量矩阵带来的影响当作噪声

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi x} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\eta}$$

(3) 监督校准：利用已知训练信号：x_1，x_2，…，x_l，…，x_L和相应的测量值$y_l = \Phi_l' x_l + e_l$ $\quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{X} + \boldsymbol{E}$

优化$\boldsymbol{\Phi}'$以使$\|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{X}\|$最小 $\quad \boldsymbol{\Phi}' := \underset{\boldsymbol{\Phi}'}{\arg\min} \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{X}\|_{\mathrm{F}}^2$

3.4.2 测量矩阵的校准

<u>如测量矩阵本身存在噪声，则要考虑校准问题</u>

(4) 非监督校准：盲校准

无须已知的/用于训练的稀疏信号

把未知的训练信号矢量$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_l$表述成矩阵$\boldsymbol{X}$，基于已知精确的测量矩阵$\boldsymbol{\Phi}_0$和多组观测矢量$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l$形成的矩阵$\boldsymbol{Y}$，通过一定的方法可以确定增益矩阵$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{X}$

$$\min_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{X}} \|\boldsymbol{X}\|_1 \quad \text{s.t. } \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D\Phi}_0\boldsymbol{X}$$

{P.65}

3.4.3 典型重构算法

1. 重构要考虑的因素

(1) 先验信息：如信号稀疏、全变分信息

(2) 测量值数量：要求尽可能少

(3) 抗噪声鲁棒性：无论测量值包含噪声或测量系统本身具有系统噪声

(4) 重构速度：占用较少计算资源

(5) 稳定性：采用L_1范数最小化

多数重建算法可成4大类，包括凸优化算法，贪婪算法，组合算法，贝叶斯算法

3.4.3 典型重构算法

2. 凸优化算法

基本思路：用凸函数代替L_0范数，并在一个R^N空间中的凸集里去优化关于未知变量$\boldsymbol{x}$的凸目标函数$J(\boldsymbol{x})$

这类算法重构精度高，需要的测量数据比较少，约为$O(K\log(N/K))$；但计算速度慢，计算复杂性约为$O(N^3)$

假设$J(\boldsymbol{x})$是一个能促进稀疏性的（即当目标信号$\boldsymbol{x}$很稀疏时，$J(\boldsymbol{x})$的值很小）且凸的代价函数

3.4.3 典型重构算法

2. 凸优化算法

在测量值没有噪声时

$$\min\{J(\boldsymbol{x})\},\quad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x}$$

在测量值有噪声时

$$\min\{J(\boldsymbol{x})\},\quad \text{s.t.}\quad H(\boldsymbol{\Phi x},\boldsymbol{y})\le\varepsilon$$

惩罚代价函数

改写成没有约束条件的形式

$$\min\{J(\boldsymbol{x})+\lambda H(\boldsymbol{\Phi x},\boldsymbol{y})\}$$

常用：$J(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|_1 \quad H(\boldsymbol{\Phi x}, \boldsymbol{y}) = 0.5 \times \|\boldsymbol{\Phi x} - \boldsymbol{y}\|_2^2$

3.4.3 典型重构算法

3. 贪婪算法

稀疏信号重构是基于线性测量值$\boldsymbol{y}$来重构出最具稀疏性的目标信号$\boldsymbol{x}$，即重建出非零个数最少的目标信号$\boldsymbol{x}$

$$\min\left\{|I| : \boldsymbol{y}=\sum_{i\in I}\boldsymbol{\phi}_i x_i\right\}$$

$I \subseteq \{1, \ldots, N\}$，表示一个索引集（对应支撑集）

这类算法的复杂度大多是由找到正确索引集所需要的迭代次数所决定的，计算速度一般比较快但是需要的测量数据多且重构的精度比较低

3.4.3 典型重构算法

4. 组合算法

基本思想：先对信号进行高度结构化采样（线性投影），再借助组/群测试快速获得信号的支撑集，实现精确重构

将重构问题表述成：已知长度为N的矢量$\boldsymbol{x}$中包含K个非零元素，$x_i \ne 0$，但它们的位置分布未知

特点是简单高效，要求测量值没有噪声干扰

(1) 计数-最小略图法：仅考虑非负信号 {P.69}

(2) 计数-中值略图法：信号为负数时也适用

3.4.3 典型重构算法

5. 贝叶斯算法

基本思想：在未知信号模型的基础上考虑非确定性因素，即考虑一个概率分布已知的稀疏信号，从随机测量中重构符合此概率分布的信号

对具有较强时间相关性的信号可提供比其他重构算法更高的重构精度，但并不能基于一定数量的测量值无失真地重建原始目标信号

(1) 相关向量机

(2) 贝叶斯压缩感知 {P.70}

3.5 稀疏编码与字典学习

设$\boldsymbol{y}_i \in \mathrm{R}^L$是一个维度为$L$的矢量，用来表示一共$N$个信号中的第$i$个；$\boldsymbol{A} = [a_1, \ldots, a_M] \in \mathrm{R}^{L\times N}$表示原子信号矩阵，其中第$i$列是维度为$L$的原子信号；$\boldsymbol{w}_i \in \mathrm{R}^M$是一个维度为$M$的矢量，用来表示构成矢量$\boldsymbol{y}_i$的原子信号的权重矢量

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad \|\boldsymbol{w}_i\|_0 \le K \quad i=1,\ldots,N$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AW} + \boldsymbol{E} \quad \|\boldsymbol{w}_i\|_0 \le K \quad i=1,\ldots,N$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}_i \in \mathrm{R}^L$是来自某个概率分布的未知误差；$\|\boldsymbol{x}\|_0$代表矢量$\boldsymbol{x}$的$L_0$范数，$K$是一个大于零的正整数

3.5 稀疏编码与字典学习

3.5.1 字典学习与矩阵分解

3.5.2 非负矩阵分解

3.5.3 端元提取

3.5.4 稀疏编码

3.5.1 字典学习与矩阵分解

如果忽略误差 $\boldsymbol{Y} \approx \boldsymbol{AW}$

这是一个矩阵乘式分解的问题

利用SVD分解 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{UDV}^{\mathrm{T}}$

如果已知$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$都是满秩矩阵，则奇异值矩阵$\boldsymbol{D}$中的非零奇异值的个数对应矩阵$\boldsymbol{Y}$的秩$R(\boldsymbol{Y})$

设$R(\boldsymbol{Y}) = T$，那么可以截掉SVD分解中各矩阵中冗余的列，得到稍微简洁的SVD分解矩阵

瘦SVD：即$\boldsymbol{U} \in \mathrm{R}^{L\times T}$，$\boldsymbol{D} \in \mathrm{R}^{T\times T}$，并且$\boldsymbol{V} \in \mathrm{R}^{N\times T}$

3.5.1 字典学习与矩阵分解

$\boldsymbol{Y} \approx \boldsymbol{AW}$ 中是个约等号，说明有误差存在

截断SVD（tSVD）：保留若干个（设保留了T个）最重要的奇异值，将不重要的奇异值设为零

为确定T，可根据SVD与PCA之间的关系，即SVD的$\boldsymbol{U}$矩阵对应PCA中的主分量，$\boldsymbol{DV}^{\mathrm{T}}$就是数据在主分量上的投影值

tSVD逼近实际上是要选取若干个主分量来重构信号。所以，可以利用PCA中确定主分量个数的方法来确定tSVD中的T

3.5.2 非负矩阵分解

截断**SVD**（tSVD）的优化形式

$$\min_{\boldsymbol{A}\in\mathrm{R}^{L\times M},\boldsymbol{W}\in\mathrm{R}^{M\times N}} \|\boldsymbol{E}\|_{\mathrm{F}}^2 \quad \text{要优化的目标}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AW} + \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_M \quad \text{限定条件}$$

两个问题：①可能有无穷多个解；②对字典信号必须正交的要求过于苛刻

用来限定解空间的规则应满足两个条件：一个是限定规则本身应具有物理意义；另一个是限定后优化问题应可解 $\Rightarrow$ 非负矩阵分解

3.5.2 非负矩阵分解

非负矩阵分解（NMF）的优化形式

$$\min_{\boldsymbol{A}\in\mathrm{R}^{L\times M},\boldsymbol{W}\in\mathrm{R}^{M\times N}} \|\boldsymbol{E}\|_{\mathrm{F}}^2 \quad \text{要优化的目标}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AW} + \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{A} \geq 0, \quad \boldsymbol{W} \geq 0 \quad \text{限定条件（非负）}$$

稀疏非负矩阵分解

（加入权重矩阵的稀疏性条件）

$$\min_{\boldsymbol{A}\in\mathrm{R}^{L\times M},\boldsymbol{W}\in\mathrm{R}^{M\times N}} d(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{AW})$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AW} + \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{A} \geq 0, \quad \boldsymbol{W} \geq 0, \quad \|\boldsymbol{W}\|_0 \leq K$$

3.5.3 端元提取

一种字典学习方法，其两个限制条件为：一个是权重矩阵非负；另一个是权重矩阵每一列的和必须为1

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{Aw}_i + \varepsilon \quad \boldsymbol{w}_i \geq 0 \quad \boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} = 1$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AW} + \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{W} \geq 0 \quad \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}$$

迭代约束端元化（ICE）

$$\min_{\boldsymbol{A}\in\mathrm{R}^{L\times M},\boldsymbol{W}\in\mathrm{R}^{M\times N}} \|\boldsymbol{E}\|_{\mathrm{F}}^2 + \lambda \sum_{i\neq j} \|\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_j\|_2^2$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AW} + \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{W} \geq 0, \quad \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}$$

{P.76}

3.5.4 稀疏编码

寻找数据的一种字典表达方式，要使得每个数据都可以表示成为少数几个原子信号的线性组合

$$\min_{\boldsymbol{A}\in\mathrm{R}^{L\times M},\boldsymbol{W}\in\mathrm{R}^{M\times N}} \|\boldsymbol{E}\|_p$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AW} + \boldsymbol{E}, \quad \|\boldsymbol{w}_i\|_0 \leq K \quad i = 1, \cdots, N$$

含义：找到用于表示数据$\boldsymbol{Y}$的字典，使得使用该字典的每个数据的重建系数在一定误差允许范围内是K稀疏的

在稀疏编码中矩阵$\boldsymbol{A}$也是需要求解的目标之一

3.6 压缩感知的成象应用

3.6.1 单象素相机

3.6.2 压缩感知磁共振成象

3.6.1 单象素相机

数字微镜器（DMD）：一种借助大量微镜来反射入射光而实现光调制的器件

微镜阵列中的每个单元都可借助电压信号控制以分别进行正负12度的机械翻转，这样就可将入射光分别进行对称角度的反射或完全吸收而不输出。这样就构成来一个由1和0组成的随机测量矩阵

图 3.6.1 单像素相机成像流程

3.6.1 单象素相机

利用光学透镜将场景中得到光源照射的目标投影到数字微镜器，以对称角度反射出来的光被光敏二极管所接收，其电压随反射光强度发生变化，量化后给出一个测量值y_i，其中每次DMD的随机测量模式对应测量矩阵中的一行$\boldsymbol{\phi}_i$，如果将输入图象看成一个矢量$\boldsymbol{x}$，则该次测量的结果为$y_i = \boldsymbol{\phi}_i\boldsymbol{x}$

将此投影操作重复M次，则通过M次随机配置DMD上每个微镜的翻转角度，就可获得M个测量结果，得到$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi x}$，再利用总变分重构法重建

3.6.2 压缩感知磁共振成象

磁共振成象中的扫描过程需要大量时间

基本思路：先对图象采用离散傅里叶标准正交基进行稀疏表示，然后对得到的K空间数据进行随机欠采样，最后通过非线性重构算法重构出图象

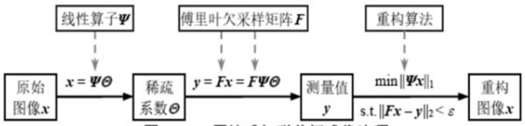

图 3.6.3 压缩感知磁共振成像流程

3.6.2 压缩感知磁共振成象

(1) 考虑一幅N-D图象$\boldsymbol{x}$在$\boldsymbol{\Psi} = \{\boldsymbol{\Psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Psi}_N\}$下具有稀疏性

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{K} \theta_i \boldsymbol{\Psi}_N = \boldsymbol{\Psi\Theta}$$

(2) 借助$\boldsymbol{F} \in \mathrm{R}^{M \times N}$（$M << N$）将图象$\boldsymbol{x}$投影到低维空间，得到$M$维的测量值$\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^M$：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Fx} = \boldsymbol{F\Psi\Theta}$$

(3) 图象$\boldsymbol{x}$可由K空间的测量值$\boldsymbol{y}$通过求解约束优化问题来精确重构：

$$\min \|\boldsymbol{\Psi x}\|_1 \quad \text{s.t.} \ \|\boldsymbol{Fx} - \boldsymbol{y}\|_2 < \varepsilon$$

联 系 信 息

- 通信地址：北京清华大学电子工程系
- 邮政编码：100084
- 办公地址：清华大学，罗姆楼，6层305室
- 办公电话：(010) 62798540
- 传真号码：(010) 62770317
- 电子邮件：zhang-yj@tsinghua.edu.cn
- 个人主页：oa.ee.tsinghua.edu.cn/~zhangyujin/