

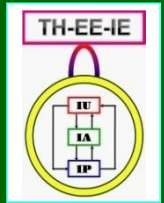
图象工程（上）

图 象 处 理

（第4版）

章毓晋

清华大学电子工程系 100084 北京



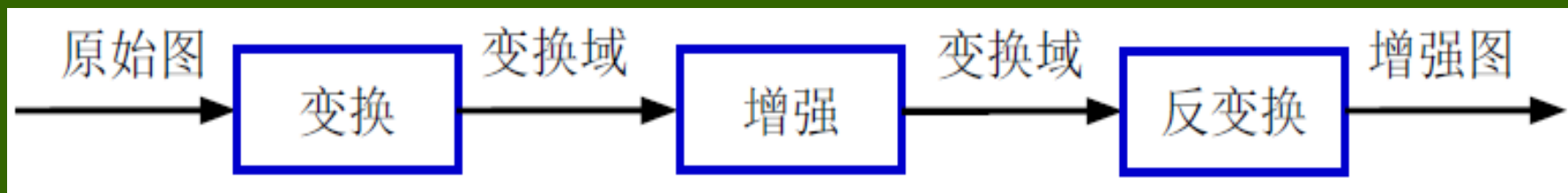
第1单元 图象增强

- 第2章 空域增强：点操作
- 第3章 空域增强：模板操作
- 第4章 频域图象增强

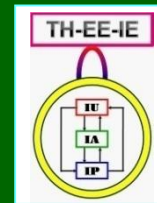
图象增强技术是最基本和最常用的一大类图象处理技术，也常用于其他图象技术应用的预处理阶段。图象增强的目的是通过对图象的特定加工，以将被处理的图象转化为对具体应用来说视觉质量和效果更“好”或更“有用”的图象

第4章 频域图象增强

为了有效和快速地对图象进行处理，常常需要将原定义在图象空间的图象以某种形式转换到另外一些空间，并利用在这些空间的特有性质方便地进行一定的加工，最后再转换回图象空间以得到所需的效果

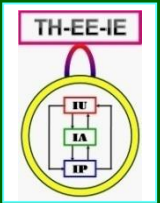


变换：傅里叶变换；变换域：频域



第4章 频域图象增强

- 4.1 频域技术原理
- 4.2 傅里叶变换
- 4.3 低通和高通滤波
- 4.4 带通和带阻滤波
- 4.5 同态滤波



4.1 频域技术原理

- 卷积理论是频域技术的基础
- 设函数 $f(x, y)$ 与线性位不变算子 $h(x, y)$ 的卷积结果是 $g(x, y)$ ，即 $g(x, y) = h(x, y) \otimes f(x, y)$ ，那么根据卷积定理在频域有：

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

其中 $G(u, v)$ ， $H(u, v)$ ， $F(u, v)$ 分别是对应 $g(x, y)$ ， $h(x, y)$ ， $f(x, y)$ 的傅里叶变换。用线性系统理论的话来说， $H(u, v)$ 是转移函数

4.1 频域技术原理

- 在具体增强应用中， $f(x, y)$ 是给定的（所以 $F(u, v)$ 可利用变换得到），需要确定的是 $H(u, v)$ ，这样具有所需特性的 $g(x, y)$ 就可通过算出 $G(u, v)$ 而得到：

$$g(x, y) = T^{-1} \{ E_H [T[f(x, y)]] \} = T^{-1} [HF]$$

- 步骤：
 - (1) 转换到频域
 - (2) 在频域增强
 - (3) 转换回空域

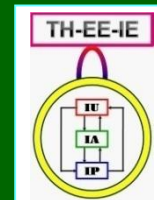
4.1 频域技术原理

在频域增强

将原始图象变换后与一个（根据需要设计的）转移函数相乘

其基本思路是要允许一定频率通过（保留某些频率分量），限制或阻止另外一些频率通过（消除某些频率分量）

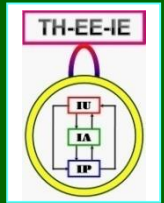
类型：① 低通滤波；② 高通滤波；③ 带阻滤波；④ 带通滤波；⑤ 同态滤波



4.1 频域技术原理

空域技术或频域技术的联系和对比

- 空域和频域技术基本可实现相同功能
频域中滤波器的转移函数和空域中的脉冲响应函数或点扩散函数构成傅里叶变换对
- 在频域中设计滤波器比较方便
在频域中分析，在空域中实现
- 空域技术（部分像素）局部性质
- 频域技术（所有像素）全局性质



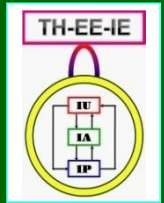
4.2 傅里叶变换

对图象的傅里叶变换将图象从图象（坐标）
空间变换到频率空间

4.2.1 2-D傅里叶变换

4.2.2 傅里叶变换定理

4.2.3 快速傅里叶变换



4.2.1 2-D傅里叶变换

2-D变换公式

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy) / N]$$

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0, 0)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy) / N]$$

频谱（幅度） $|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$

相位角 $\phi(u, v) = \arctan[I(u, v) / R(u, v)]$

功率谱 $P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$

4.2.1 2-D傅里叶变换

2-D变换核

正变换: $f(x, y) \Rightarrow F(u, v)$

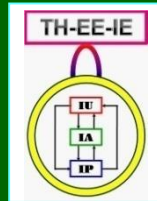
正向变换核

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy) / N]$$

反变换: $f(x, y) \Leftarrow F(u, v)$

反向变换核

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy) / N]$$



4.2.1 2-D傅里叶变换

分离性

1个2-D变换核可分解成2个1-D变换核

$$\frac{1}{N} \exp[-j2\pi(ux + vy)/N] = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[-j2\pi ux/N] \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[-j2\pi vy/N]$$

$$\frac{1}{N} \exp[j2\pi(ux + vy)/N] = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[j2\pi ux/N] \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[j2\pi vy/N]$$

对称性

分离后的两部分函数形式一样

4.2.1 2-D傅里叶变换

正变换分解

列变换

$$F(x, v) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi v y / N] \quad x, v = 0, 1, \dots, N-1$$

行变换

$$F(u, v) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) \exp[-j2\pi u x / N] \quad u, v = 0, 1, \dots, N-1$$

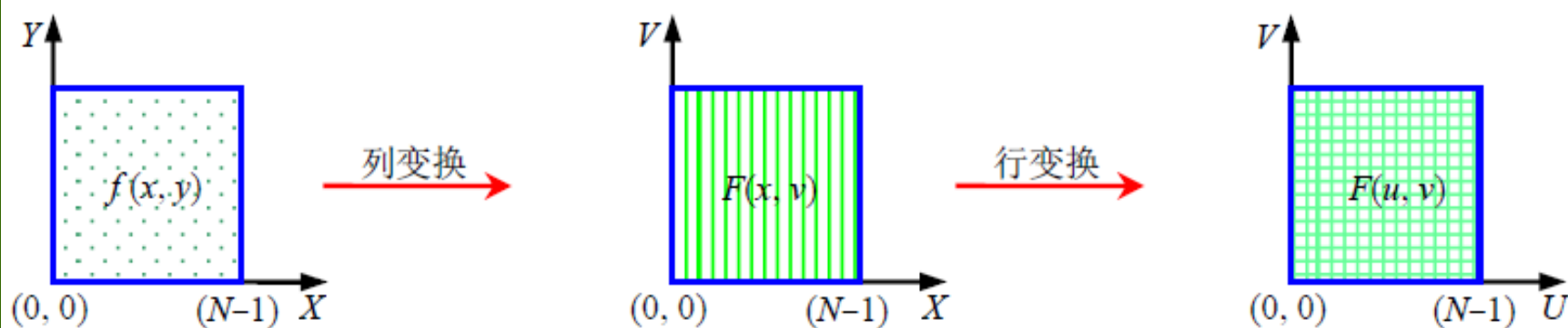
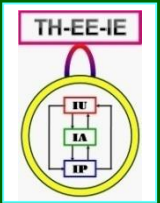


图 4.2.3 由 2 步 1-D 变换计算 2-D 变换



4.2.2 傅里叶变换定理

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

1. 平移定理

$$f(x-a, y-b) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-j2\pi(au + bv) / N]$$

证明：计算（右边）反变换

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) \exp[-j2\pi(au + bv) / N] \exp[j2\pi(xu + yv) / N] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) \exp\{j2\pi[(x-a)u + (y-b)v] / N\} \\ &= f(x-a, y-b) \end{aligned}$$

反向变换核

4.2.2 傅里叶变换定理

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

1. 平移定理

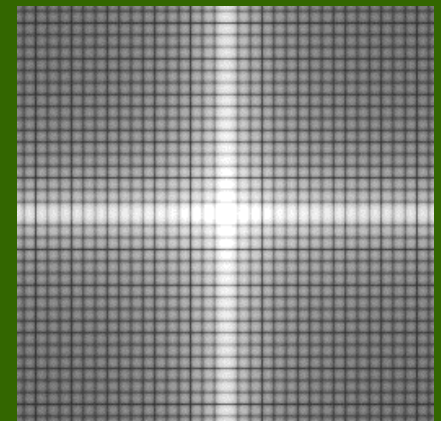
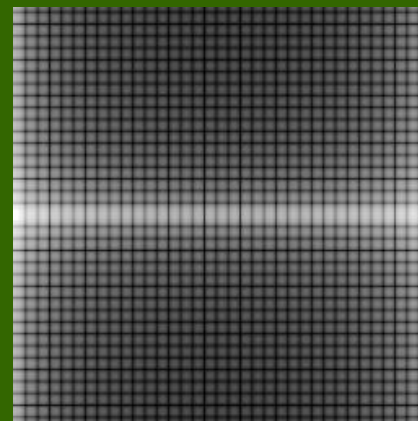
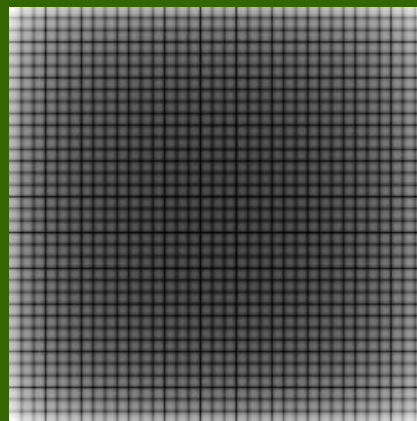
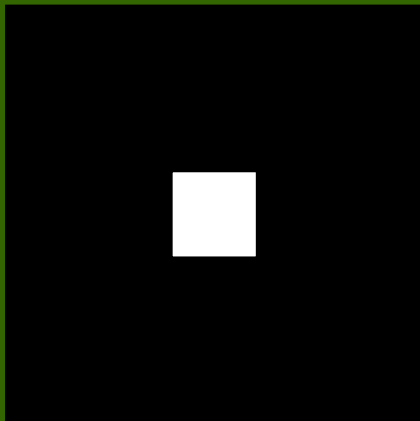
$$F(u - c, v - d) \Leftrightarrow f(x, y) \exp[j2\pi(cx + dy) / N]$$

原始图象

傅里叶频谱

垂直移动

水平移动



4.2.2 傅里叶变换定理

2. 旋转定理

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

极坐标

$$x = r \cos \theta$$

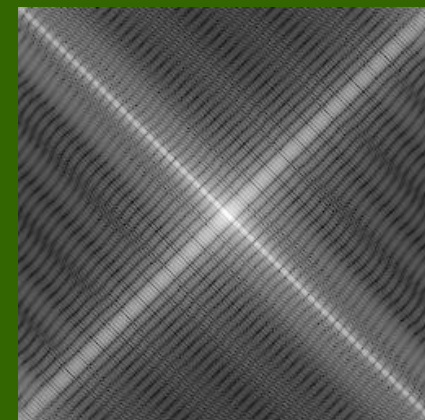
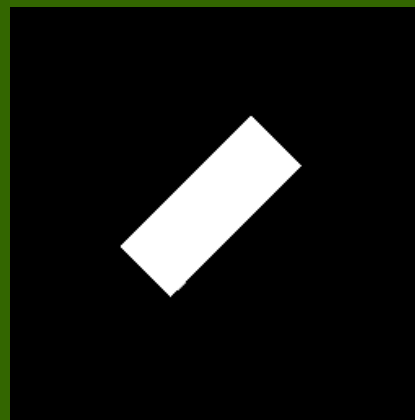
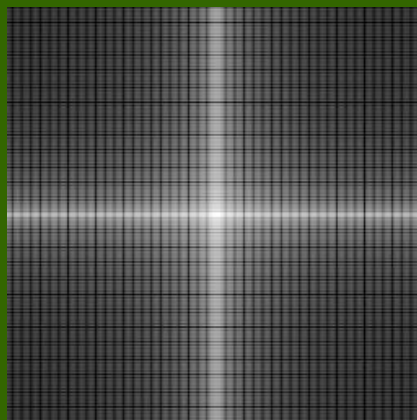
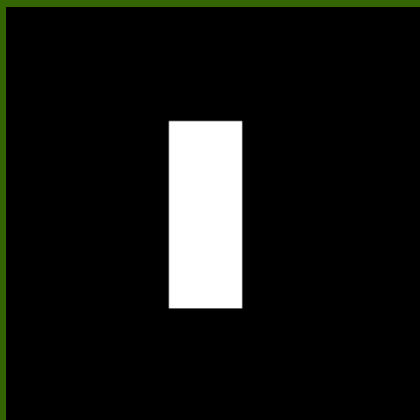
$$y = r \sin \theta$$

$$f(r, \theta) \Leftrightarrow F(w, \phi)$$

$$u = w \cos \phi$$

$$v = w \sin \phi$$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(w, \phi + \theta_0)$$



4.2.2 傅里叶变换定理

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

3. 尺度定理

(相似定理)：尺度（放缩）变化时的性质

{P.83}

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

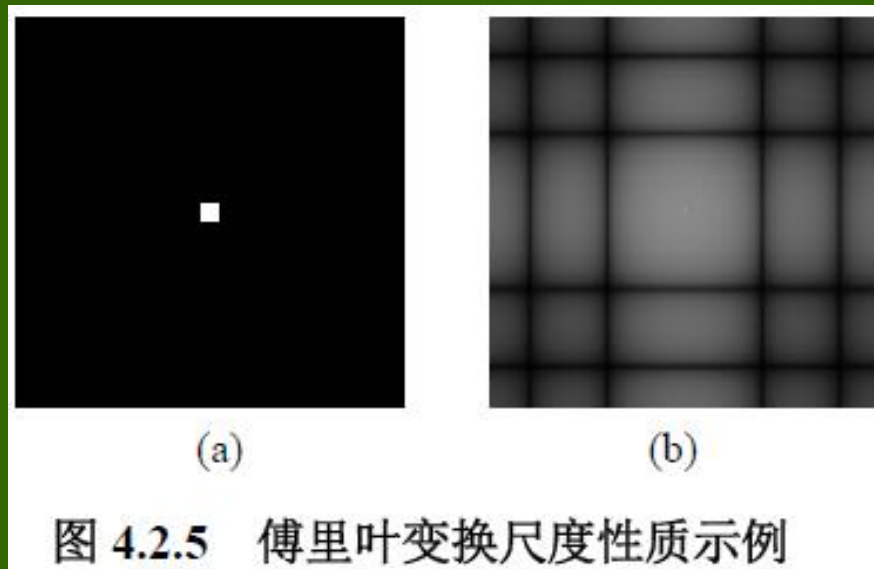


图 4.2.5 傅里叶变换尺度性质示例

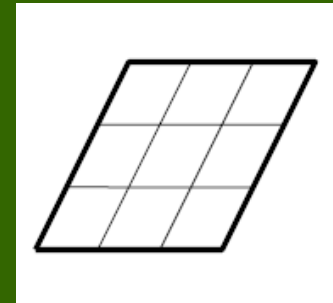
4.2.2 傅里叶变换定理

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

4. 剪切定理

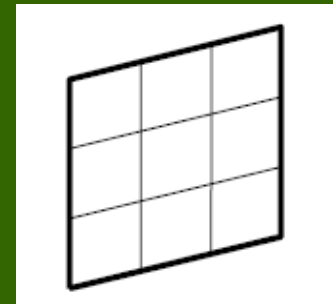
(水平方向) 纯剪切

$$f(x+by, y) \Leftrightarrow F(u, v-bu)$$



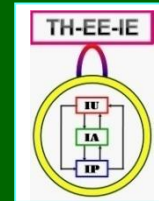
(垂直方向) 纯剪切

$$f(x, y+dx) \Leftrightarrow F(u-dv, v)$$



{图4.2.6}





4.2.2 傅里叶变换定理

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

4. 剪切定理

组合剪切

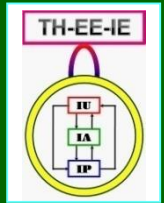
$$f(x + by, dx + y) \Leftrightarrow \frac{1}{|1 - bd|} F\left(\frac{u - dv}{1 - bd}, \frac{-bu + v}{1 - bd}\right)$$

矩阵表达

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & b \\ d & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

水平剪切 $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

垂直剪切 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$



4.2.2 傅里叶变换定理

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

4. 剪切定理

先水平剪切后垂直剪切

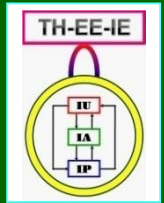
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ d & 1+bd \end{bmatrix}$$

先垂直剪切后水平剪切

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+bd & b \\ d & 1 \end{bmatrix}$$

{图4.2.7}

{图4.2.8}



4.2.2 傅里叶变换定理

5. 卷积定理

1-D
$$f(x) \otimes g(x) \Leftrightarrow F(u)G(u)$$

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(u) \otimes G(u)$$

2-D

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p, q)g(x - p, y - q)dpdq$$

$$f(x, y) \otimes g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$$

$$f(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \otimes G(u, v)$$

4.2.2 傅里叶变换定理

6. 相关定理

1-D

$$f(x) \oplus g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(z)g(x+z)dz$$

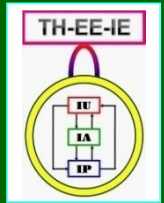
互相关: $f(x) \neq g(x)$ 自相关: $f(x) = g(x)$

2-D

$$f(x, y) \oplus g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(p, q)g(x+p, y+q)dpdq$$

$$f(x, y) \oplus g(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v)G(u, v)$$

$$f^*(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \oplus G(u, v)$$



4.2.3 快速傅里叶变换

直接进行一个 $N \times N$ 的2-D傅里叶变换需要 N^4 次复数乘法运算和 $N^2(N^2 - 1)$ 次复数加法运算

$$F\{f(x)\} = F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux / N] \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

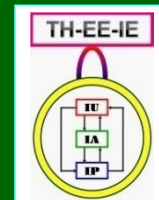
1-D: 复数乘法和加法的次数都正比于 N^2

快速傅里叶变换 (FFT) :

将复数乘法和加法的次数减少为正比于 $N \log_2 N$

逐次加倍法: 复数乘法次数由 N^2 减少为 $(N \log_2 N)/2$

复数加法次数由 N^2 减少为 $N \log_2 N$

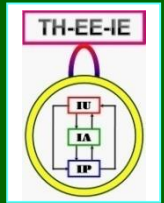


4.3 低通和高通滤波

低通滤波和高通滤波的目的或功能相反，但低通滤波器和高通滤波器又具有对偶性

4.3.1 低通滤波

4.3.2 高通滤波



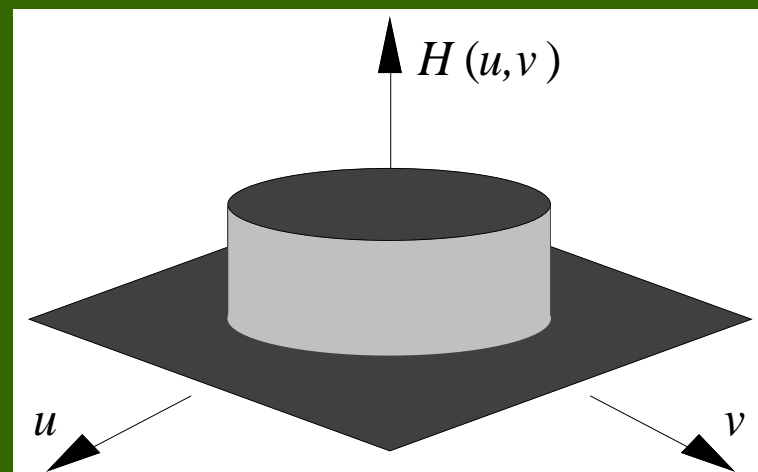
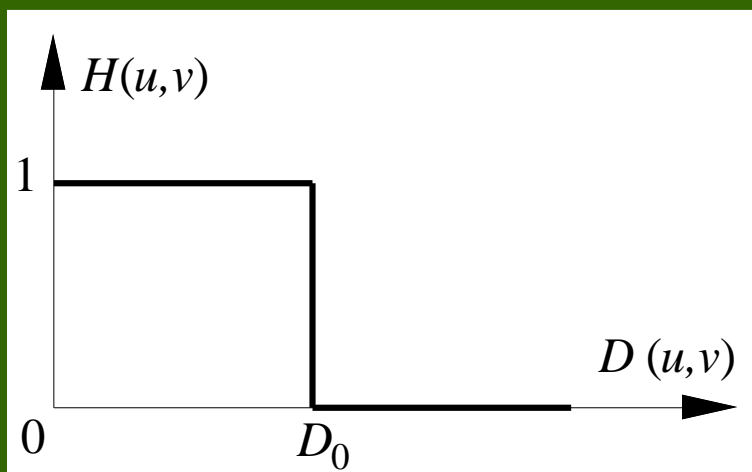
4.3.1 低通滤波

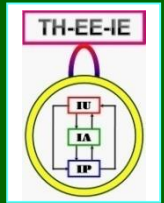
- 低通滤波是要保留图象中的低频分量而除去或减弱高频分量
- 图象中的边缘和噪声都对应图象傅里叶变换的高频部分，所以如要在频域中消弱其影响就要设法减弱这部分频率的分量
- 根据频域增强技术的原理，低通滤波需要选择一个合适的 $H(u, v)$ 以得到消弱 $F(u, v)$ 中高频分量的 $G(u, v)$
- 设计低通滤波器关键是设计滤波转移函数

4.3.1 低通滤波

1. 理想低通滤波

理想是指小于（截断/截止频率） D_0 的频率可以完全不受影响地通过滤波器，而大于 D_0 的频率则完全通不过





4.3.1 低通滤波

1. 理想低通滤波

$H(u, v)$: 转移 / 滤波函数

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{如 } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{如 } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

D_0 : 截断频率 (非负整数)

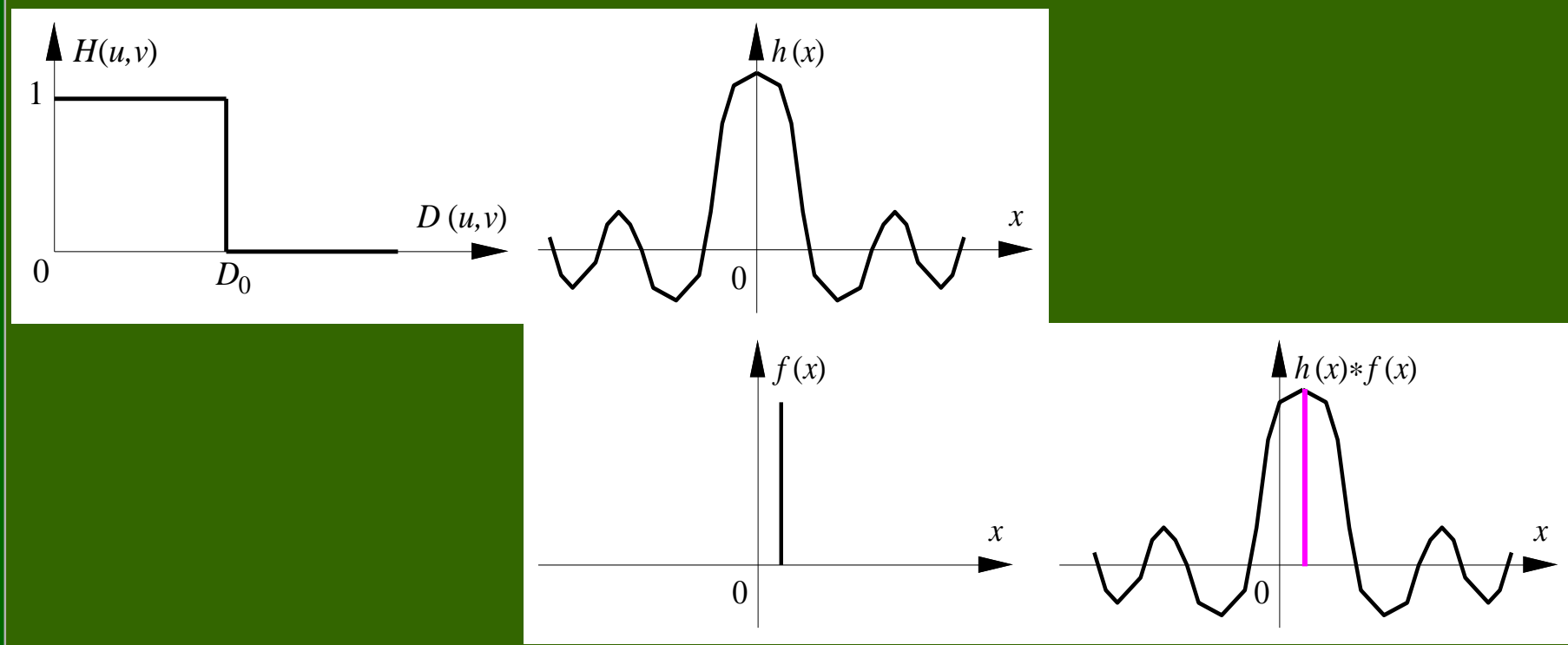
$D(u, v)$ 是从点 (u, v) 到频率平面原点的距离

$$D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

4.3.1 低通滤波

2. 理想低通滤波的模糊

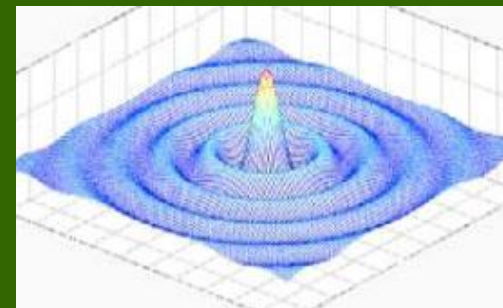
理想低通滤波产生“振铃”现象



4.3.1 低通滤波

2. 理想低通滤波的模糊

- 理想低通滤波所产生的“振铃”现象在2-D图象上表现为一系列同心圆环
- 圆环半径反比于截断频率



理想低通滤波产生模糊效应 (图4.3.4)

B : 能量百分比, R : 圆周半径, $P(u, v)$: 功率谱

$$B = 100 \times \left[\sum_{u \in R} \sum_{v \in R} P(u, v) \right] / \left[\sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v) \right]$$

4.3.1 低通滤波

3. 巴特沃斯低通滤波

减少振铃效应，高低频率间的过渡比较光滑

- 阶为 n

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

物理上可实现（理想低通滤波器在数学上定义得很清楚，在计算机模拟中也可实现，但在截断频率处直上直下的理想低通滤波器是不能用实际的电子器件实现的）

4.3.1 低通滤波

3. 巴特沃斯低通滤波

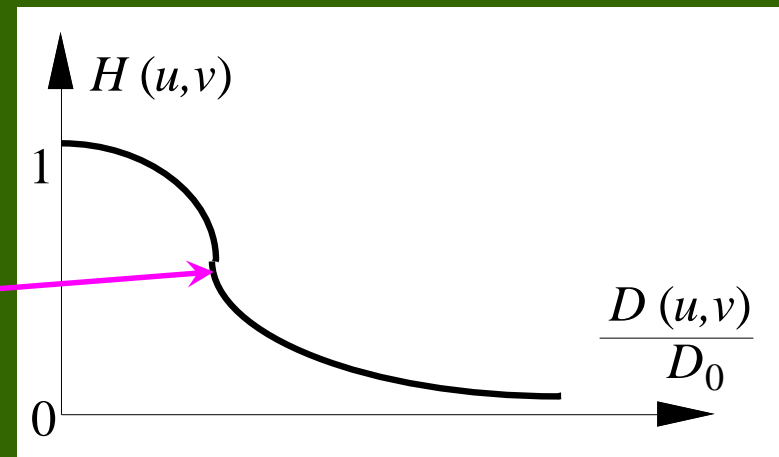
截断频率

使 H 最大值降到
某个百分比（常取
50%）的频率

在 $D(u, v) = D_0$ 时

- $H(u, v) = 1/2$
- $H(u, v) = 1/2^{1/2}$

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

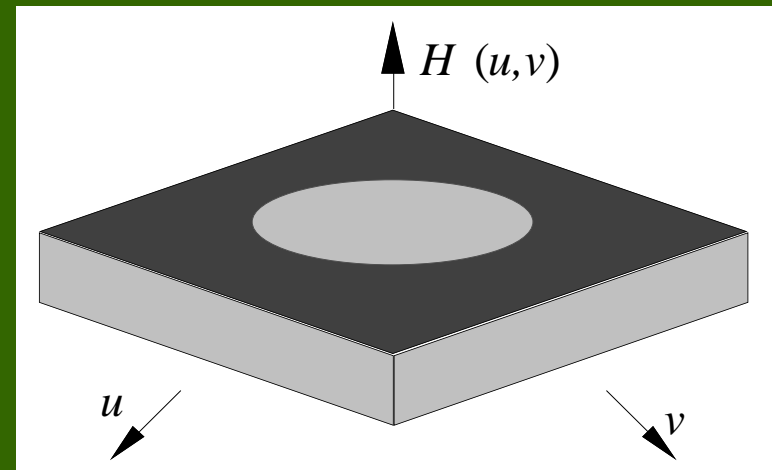
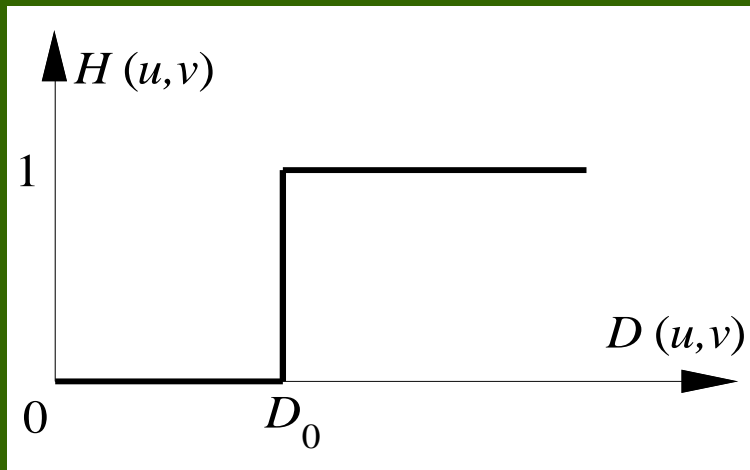


4.3.2 高通滤波

1. 理想高通滤波

形状与低通滤波的形状正好相反

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{如 } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{如 } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$



4.3.2 高通滤波

2. 巴特沃斯高通滤波

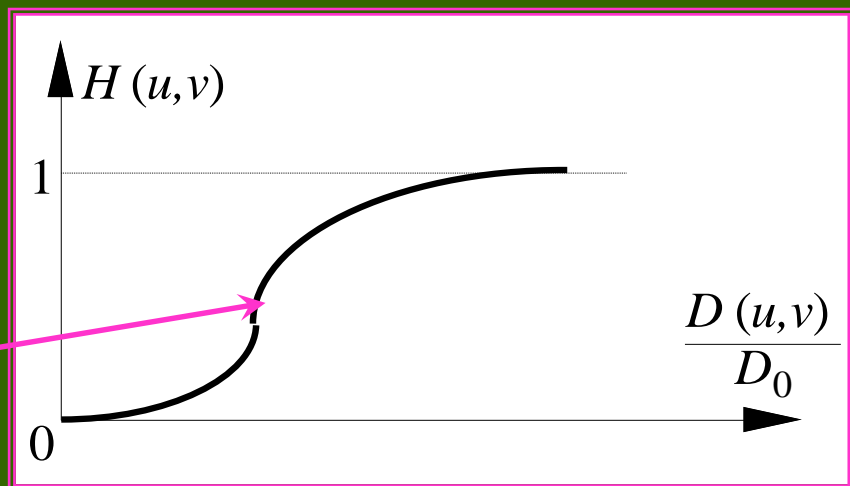
形状与巴特沃斯低通滤波器的形状正好相反

截断频率

使 H 值上升到最大值
某个百分比 (常取50%)
的频率

- $H(u, v) = 1/2$

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$



4.3.2 高通滤波

3. 高频增强滤波

傅里叶变换: $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$

高频增强转移函数: $H_e(u, v) = k \times H(u, v) + c$

高频增强输出图的傅里叶变换:

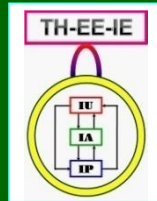
$$G_e(u, v) = k \times G(u, v) + c \times F(u, v)$$

反变换回去:

$$g_e(x, y) = k \times g(x, y) + c \times f(x, y)$$

高通

原图



4.3.2 高通滤波

4. 高频提升滤波

用原始图减去低通图得到高通滤波的效果

把原始图乘以一个放大系数 A 再减去低通图就可实现高频提升（high-boost）滤波

$$G_{\text{HB}}(u, v) = A \times F(u, v) - F_L(u, v) = (A - 1)F(u, v) + F_H(u, v)$$

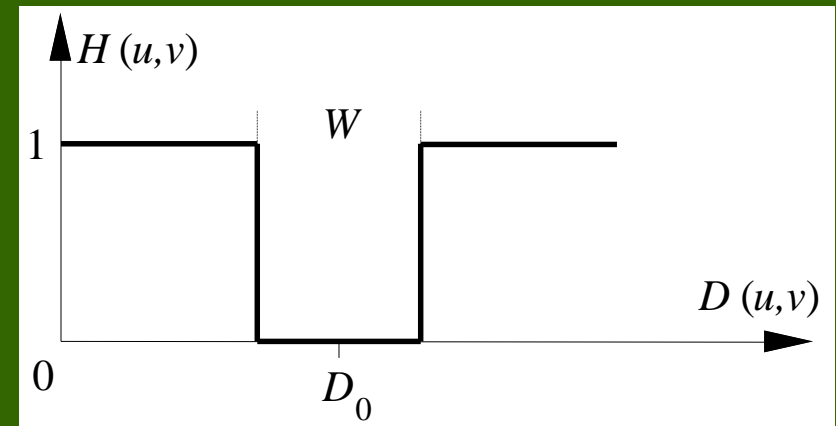
高通滤波： $A - 1 = 0$

高频增强滤波： $A - 1 = ? \quad +/ -$

4.4 带通和带阻滤波

1. 带阻滤波

阻止一定频率范围
(允许其他频率范围通过)



- ◆ 如果这个频率范围的下限是0 (上限不为 ∞)，则带阻滤波器成为高通滤波器
- ◆ 如果这个频率范围的上限是 ∞ (下限不为0)，则带阻滤波器成为低通滤波器

4.4 带通和带阻滤波

1. 带阻滤波

(以原点为中心)

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{如 } D(u, v) < D_0 - W/2 \\ 0 & \text{如 } D_0 - W/2 \leq D(u, v) \leq D_0 + W/2 \\ 1 & \text{如 } D(u, v) > D_0 + W/2 \end{cases}$$

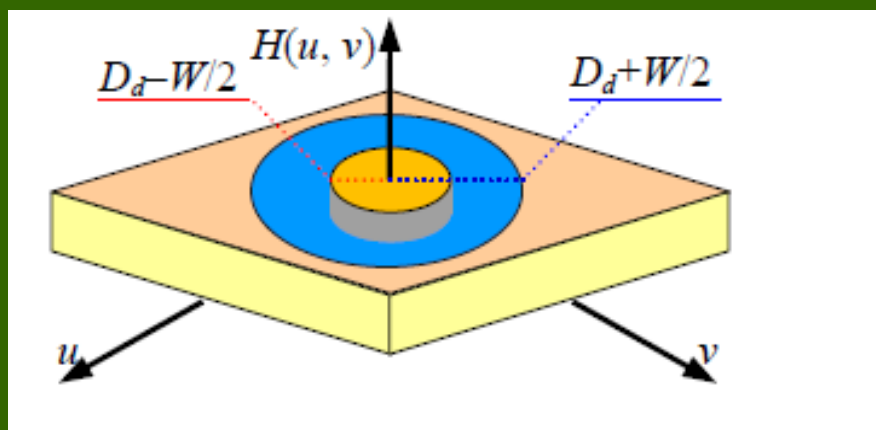


图 4.4.1 放射对称的带阻滤波器透视图

巴特沃斯带阻滤波器

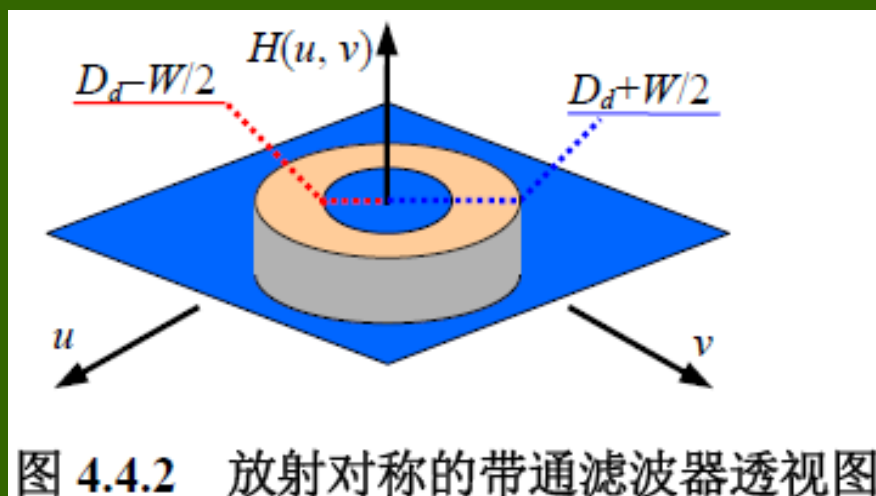
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

4.4 带通和带阻滤波

2. 带通滤波

(以原点为中心)

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{如 } D(u, v) < D_0 - W/2 \\ 1 & \text{如 } D_0 - W/2 \leq D(u, v) \leq D_0 + W/2 \\ 0 & \text{如 } D(u, v) > D_0 + W/2 \end{cases}$$



巴特沃斯带通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{\left[\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^{2n} - 1}$$

4.4 带通和带阻滤波

3. 陷波滤波

也简称陷波器，是一类选择性滤波器

阻断陷波器可用多组（两个一组）将其中心移到陷波中心的高通滤波器的乘积来获得

Q 组

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

频域中心
($M/2, N/2$)

$$D_k(u, v) = \left[(u - M/2 - u_k)^2 + (v - N/2 - v_k)^2 \right]^{1/2}$$

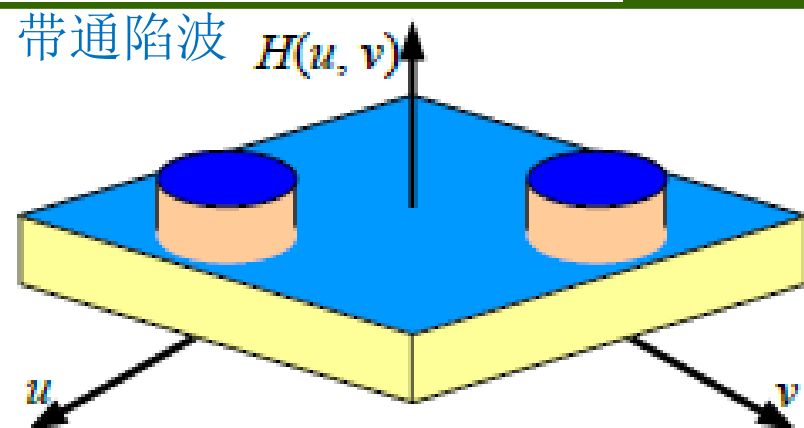
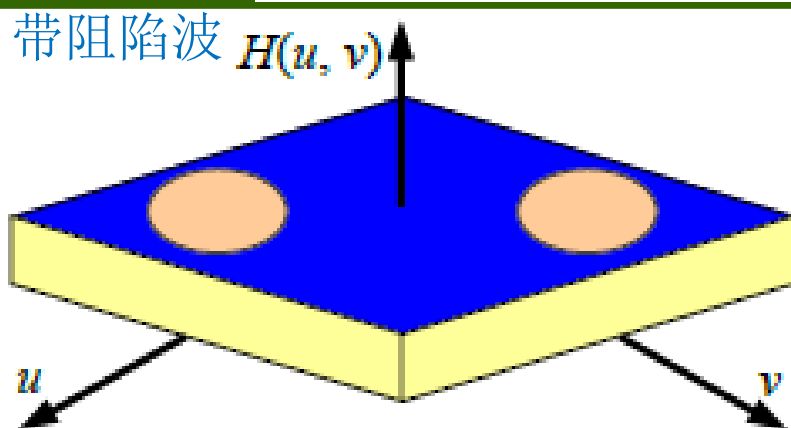
$$D_{-k}(u, v) = \left[(u - M/2 + u_k)^2 + (v - N/2 + v_k)^2 \right]^{1/2}$$

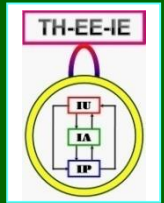
4.4 带通和带阻滤波

3. 陷波滤波

一类选择性滤波，陷波滤波器也简称陷波器
陷波滤波器必须两两对称地工作

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & D_k(u,v) \leq D_0 \text{ 或 } D_{-k}(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$



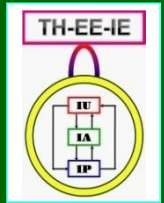


4.5 同态滤波

同态滤波基于一个简单的亮度成象模型

4.5.1 亮度成象模型

4.5.2 同态滤波增强



4.5.1 亮度成象模型

图象成象模型

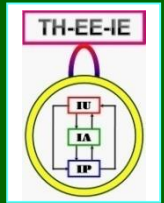
2-D亮度函数: $f(x, y)$

亮度是能量的量度，一定不为零且为有限值

$$0 < f(x, y) < \infty$$

- (1) 入射到可见场景上的光量
- (2) 场景中目标对入射光反射的比率

照度成分 $i(x, y)$ 和反射成分 $r(x, y)$



4.5.1 亮度成象模型

图象成象模型

$f(x, y)$ 与 $i(x, y)$ 和 $r(x, y)$ 都成正比

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

$i(x, y)$ 的值是由光源决定的

$$0 < i(x, y) < \infty$$

$r(x, y)$ 的值是由场景中的目标特性所决定的

$$0 < r(x, y) < 1$$

4.5.2 同态滤波增强

同态滤波

同时将图 象亮度范围进行压缩
和将图 象对比度进行增强

- 利用频域增强思路

将乘性转换为加性，处理后再转换回来

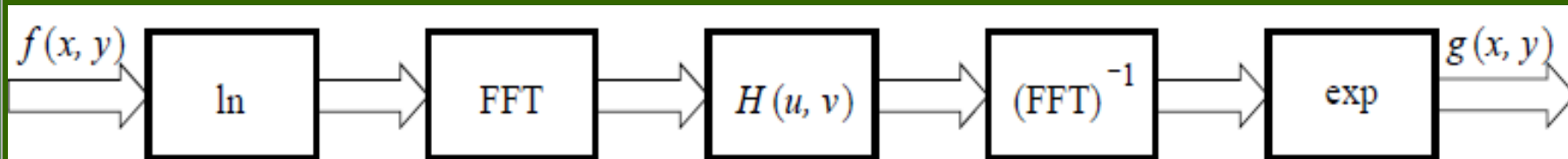
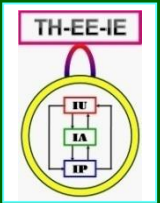


图 4.5.1 同态滤波流程图



4.5.2 同态滤波增强

(4.5.3) (1) 两边取对数:

$$\ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

(2) 两边取傅氏变换: $F(u, v) = I(u, v) + R(u, v)$

(3) 用一个频域函数 $H(u, v)$ 处理 $F(u, v)$:

$$H(u, v)F(u, v) = H(u, v)I(u, v) + H(u, v)R(u, v)$$

(4) 反变换到空域: $h_f(x, y) = h_i(x, y) + h_r(x, y)$

(5) 两边取指数:

$$g(x, y) = \exp|h_f(x, y)| = \exp|h_i(x, y)| \bullet \exp|h_r(x, y)|$$

4.5.2 同态滤波增强

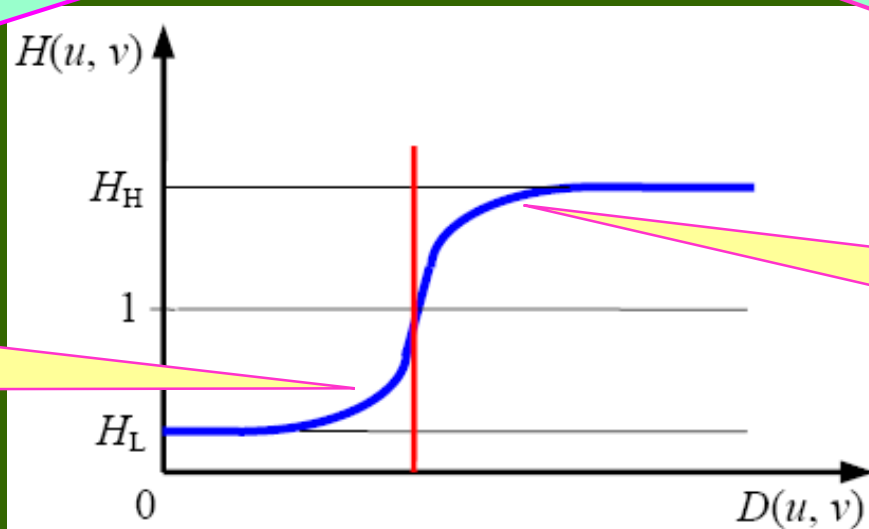
图象成象模型

- $f(x, y)$ 与 $i(x, y)$ 和 $r(x, y)$ 都成正比

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

低频分量

照度分量



高频分量

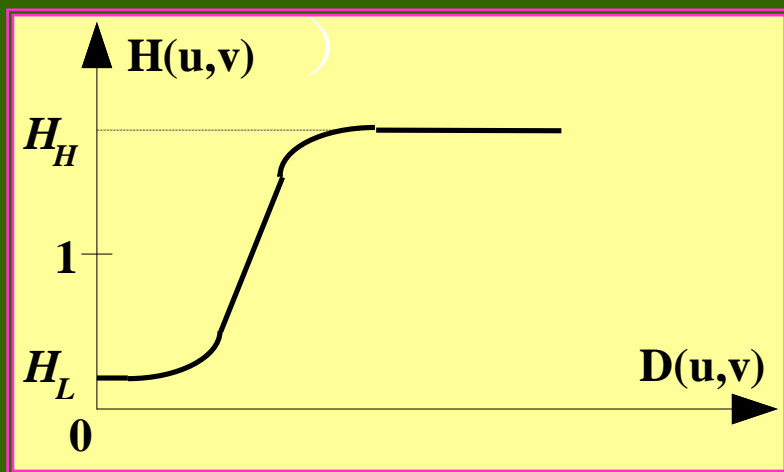
反射分量

4.5.2 同态滤波增强

特点： 能消除乘性噪声，还能同时压缩图象的整体动态范围和增加图象中相邻区域间的对比度

典型曲线

效果示例 ($H_L = 0.5$, $H_H = 2.0$)





联系信息

- ☞ 通信地址：北京清华大学电子工程系
- ☞ 邮政编码：100084
- ☞ 办公地址：清华大学，罗姆楼，6层305室
- ☞ 办公电话：(010) 62798540
- ☞ 传真号码：(010) 62770317
- ☞ 电子邮件：zhang-yj@tsinghua.edu.cn
- ☞ 个人主页：oa.ee.tsinghua.edu.cn/~zhangyujin/